1

SERIE VI

2022

MEMORIE

DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO

ACCADEMIA·DELLE·SCIENZE·DI·TORINO
VERITAS·ET·VTILITAS
R·SCIENT·TAVRIN·ACADEMIA
INSTAVRATA
MDCCLXXXIII

SERIE VI — 1 — 2022

MEMORIE

DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO

Accademia
delle Scienze
di Torino
1783

Il volume 42-43 delle «Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali» e il volume 45 delle «Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino. Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche» sono gli ultimi volumi della V serie.

Con questo numero si apre la VI serie delle «Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino», in cui confluiscono le «Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali» e le «Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino. Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche».

2023 – ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO
Via Accademia delle Scienze, 6 – 10123 Torino, Italia
Uffici: Via Maria Vittoria, 3 – 10123 Torino, Italia
+39-011-562.00.47
info@accademiadellescienze.it
www.accademiadellescienze.it

Direttore: Massimo Mori
Comitato editoriale: Mario Alberto Chiorino, Franco Pastrone, Alberto Piazza (*per la Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali*); Gastone Cottino, Maria Luisa Doglio, Alessandro Roccati (*per la Classe di Scienze morali, storiche e filologiche*).

I contributi pubblicati nelle «Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino» sono disponibili in rete ad accesso aperto e sono valutati dal Comitato editoriale e da *referees* anonimi attraverso un sistema di *peer review*.

Le «Memorie» sono pubblicate con periodicità annuale, il presente numero è uscito nel maggio 2023 ed è relativo all'a.a. 2021-2022.

Redazione editoriale: Maria Filippi
Per contattare la redazione scrivere a
pubblicazioni@accademiadellescienze.it

Le vendite vengono effettuate presso la Libreria Oolp
Via Maria Vittoria, 36 – 10123 Torino, +39-011-812.27.82
info@libreriaoolp.it

ISSN: 2974-8291 (versione stampata)

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Acc. Sc. Torino
Memorie 1 (2022), 5-52, 13 figg., 3 tabb. SCIENZA DELL'INGEGNERIA

The Scattering by an Half-Plane Embedded in Stratified Media. Network Methods: Electromagnetics *vs* Elasticity

Vito Daniele[*] e Rodolfo Zich[**]

Memoria presentata dai Soci nazionali Vito Daniele e Rodolfo Zich
nell'adunanza del 17 novembre 2021, ricevuta l'8 marzo 2022
e approvata nell'adunanza del 18 maggio 2022

Abstract. *Boundary value problems in stratified media occur in a wide variety of scientific domains where they are usually approached in the specific disciplinary context so that the added values of cross-fertilization between different domains are lost. The work intends to show the possibilities and advantages of managing electromagnetic problems over elastic ones with identical methodology, extending de facto the powerful network approach in the context of elasticity.*

Keywords: elasticity, electromagnetism, integral equations, spectral domain, wave motion, Wiener-Hopf method.

Riassunto. *I problemi di valore al contorno nei media stratificati si verificano in un'ampia varietà di domini scientifici in cui vengono solitamente affrontati nello specifico contesto disciplinare in modo che i valori aggiunti della fertilizzazione incrociata tra diversi domini vengano persi. Il lavoro intende mostrare le possibilità e i vantaggi della gestione dei problemi elettromagnetici rispetto a quelli elastici con identica metodologia, estendendo di fatto l'approccio delle reti potenti nel contesto dell'elasticità.*

Parole chiave: dominio spettrale, elasticità, elettromagnetismo, equazioni integrali, moto ondoso, tecnica Wiener-Hopf.

1. Introduction

The study of wave propagation in stratified media occurs in a large number of disciplinary contexts such as electromagnetics (propagation on the plan

[*] Politecnico di Torino; vito.daniele@polito.it
[**] Politecnico di Torino; rodolfo.zich@polito.it

earth, in the troposphere, in the ionosphere), in multi-fluid plasm, integrated optics, optical lens, piezo electric sensors, acoustic, elasticity, semiconductors, seismology.

Propagation in layered planar regions (Fig. 1) is scientifically fundamental. In particular, it introduces almost all types of waves that can be found in wave motion: reflected and transmitted waves, surface and leaky waves, lateral waves, elastic Rayleigh surface waves, elastic leaky Rayleigh waves, Lamb waves, Love waves and so on.

The contributions dedicated to this topic are innumerable and in particular there are two excellent books [1,2]. The first one, the masterly book by Felsen and Marcuvitz, is essentially devoted to electromagnetics and makes a large use of network representation; the second one, by Brekhovskikh, deals also with elastic waves.

Diffraction problems arise in presence of stratification discontinuities consisting of impedance half planes. In electromagnetism, an exhaustive introduction to this item is given in chapters 7 and 8 of the book by Daniele and Zich [3]. That presentation is characterized by systematic use of network representations.

As regards the elastic media, the problem of a half plane crack located in an indefinite isotropic medium [4] has been solved using a traditional deduction of the Wiener Hopf (WH) equations [5].
Today we can propose a significant qualitative progress in dealing with the analysis of propagation and scattering from half-planes placed in stratified media on the basis of the following factors:

- Recent progress in the Wiener-Hopf technique
- The adoption of circuit techniques
- The availability of Advanced Computing Enviroment (ACE) such as Mathematica®.

The extensive use of network representation arises in the development of the Radar Technology during World War II which produced a new rigorous methodology for dealing with Maxwell's equations to obtain efficient quantitative calculations. In particular, the rigorous and systematic reformulation of the solution of Maxwell's equations in circuit terms has been proposed,leading to a solid body of network methods in Field Theory [6]. These network approaches have greatly simplified the setup and resolution of many field problems, and have helped make problems more transparent, thus providing better physical insight.The major credit for the systematic

development of this reformulation into network terms goes to Marcuvitz (Laurea Honoris Causa at Politecnico di Torino in 1993). A very important corollary aspect is that in network field theory, the problems can be rigorously phrased in terms of appropriate transmission lines that represent guiding Regions. It means that it is very important to study procedures for wave motion in stratified region in terms of lines.

Furthermore, as shown by Schwinger, diffraction due to half-plane discontinuities in stratified regions can tackled in terms of integral equations in the spectral domain and specifically by resorting to the Wiener-Hopf techniques [7],[5],[3].

Taking into account of the profound similarity of the fundamental concepts in the theory of the propagation of elastic and electromagnetic waves, these authors believe that it is very advantageous and considerably expands the class of affordable problems if we reformulate the presentation given in [3] for electromagnetism waves in the framework of the wave propagation in elastic waves.

However, even though the same mathematical methods and basic concept for solving problems can be applied in both cases, elastic waves in solids are much more difficult to analyze than their electromagnetic counterparts. Fortunately, very powerful symbolic manipulator codes as MATHEMATICA have practically eliminated these drawbacks. In addition to further appreciating why MATHEMATICS (or similar codes) is now indispensable, we recall that one of the first paper that suggested the use of circuital methods in elastic waves was proposed in 1969 by Oliner (a student of Marcuvitz) [8]. Unfortunately in the absence of a powerful symbolic manipulator at the time, Oliner used only scalar network representations. Conversely, as shown in this article, vector networks must be introduced, the solutions of which require unimaginable algebraic manipulations to be performed manually The network formalism and MATHEMATICA impose a necessary synergy that provides exact and/or very accurate approximate solutions of the fundamental problems of wave propagation in elastic media. However, the difficulty of reproducing the solutions of the equations obtained with MATHEMATICS remains. In fact, many times they are too bulky to be presented in a written document such as a paper or a book. In the author's opinion, there is the need to introduce new procedures both to present the new results in a simple way, and above all to enable the reader to reproduce them.

2. Two different scientific environments, one methodology

Although there are many scientific fields where the same approach can be used, we will limit ourselves to considering only electromagnetism and elasticity.

For the two scientific fields we choose the same problem and study the scattering from an impenetrable half plane immersed in a multilayered planar medium, as sketched in Fig. 1. This problem highlights how we can use the same approach in the two different scientific fields, starting from the isomorphism of the basic mathematical formulation in the two scientific domains. In fact, the main topic of the reflections proposed in this paper regards the "network formulation" we will use.

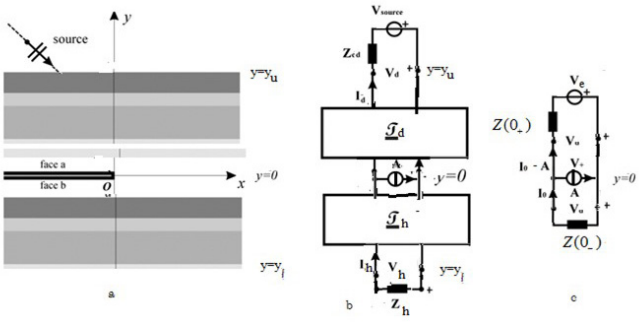


Fig. 1. a) A plane wave hits a stratified electromagnetic or elastic medium in which a semi-infinite planar scatterer is immersed; b) equivalent network model; c) simplified network model valid for y = 0.

Considering the formal equivalence of the basic mathematical formulation in the two domains, in the following we will focus on the following aspects:

- the transversalization, that is the reformulation of the problem in terms of equations involving only the continuous components in the stratification;
- the network representation of a slab, or its equivalent circuit;
- the network representation of a multislab;
- the network representation of a half-plane discontinuity;
- the Wiener Hopf (WH) equation of the problem;
- new problems.

Throughout the paper we assume time harmonic fields with time dependence factor $\exp(j\omega t)$ (understood and omitted everywhere).

3. Basic mathematical formulation in Electromagnetism and Elasticity

Table 1 explicits the basic equations in the two domains and the notations used

Basic equations in dyadic notations	
Electromagnetism	Elasticity
(1) $\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mathbf{B} - \mathbf{m}$ (2) $\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\mathbf{D} + \mathbf{j}$	(1) $\nabla \cdot \bar{\mathbf{T}} = j\omega\mathbf{p} + \mathbf{f}$ (2) $\nabla \mathbf{v} = j\omega\bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{h}}$
∇ Nabla operator $\mathbf{E}$ electric field (vector) $\mathbf{H}$ magnetic field (vector) $\mathbf{D}$ electric induction (vector) $\mathbf{B}$ magnetic induction (vector) $\mathbf{j}$ electric current density (vector) $\mathbf{m}$ magnetic current density (vector)	∇ Nabla operator $\bar{\mathbf{T}}$ Stress tensor (symmetric dyadic) $\mathbf{v}$ velocity field (vector) $\mathbf{p}$ moment field (vector) $\bar{\mathbf{S}}$ Strain tensor (symmetric dyadic) $\mathbf{f}$ unity volume force (vector) $\bar{\mathbf{h}}$ External strain source rate (symmetric dyadic)
Constitutive Equation *(3)* $\mathbf{D} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{E} + \bar{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{H}$ *(4)* $\mathbf{B} = \bar{\boldsymbol{\zeta}} \cdot \mathbf{E} + \bar{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{H}$	Constitutive Equation *(3)* $\bar{\mathbf{T}} = \bar{\bar{\mathbf{C}}} : \bar{\mathbf{S}}$ (Hook law) (4) $\mathbf{p} = \rho\mathbf{v}$

Parameters in isotropic media	Parameters in isotropic media
$\bar{\mathbf{1}}$ *unity tensor (dyadic)* $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon_r \varepsilon_o \bar{\mathbf{1}}$ ε_o *free space permettivity* $\bar{\boldsymbol{\mu}} = \mu_r \mu_o \bar{\mathbf{1}}$ μ_o *free space permeability* $\bar{\boldsymbol{\xi}} = 0, \bar{\boldsymbol{\zeta}} = 0$ $k_o = \omega\sqrt{\mu_o \varepsilon_o}$ *free space propagatin constant* $Z_o = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}}$ *free space intrinsec impedance*	$\bar{\mathbf{1}}$ *unity tensor (dyadic)* $\bar{\bar{\mathbf{I}}}^{sym}$ symmetric fourth order unity (tetradyadic) $\bar{\bar{\mathbf{C}}} = \lambda \bar{1}\,\bar{1} + 2\mu \bar{\bar{\mathbf{I}}}^{sym}$ λ, μ : Lamè parameters (scalars) ρ density (scalar)

Table 1. Basic equations in linear electromagnetism (first column) and Elasticity (second column).

To obtain a "transverse" mathematical formulation of the problem in stratified regions it is necessary to adopt a vector representation of the basic equations. This can be done directly in electromagnetism while in elasticity it is necessary to give a vector representation (as introduced by Voigt [9]) of the symmetric tensors $\bar{\mathbf{T}}$. Consequently in a cartesian system of coordinates (x,y,z),in the matrix formalism, the stress $\bar{\mathbf{T}}$ which in table 1 is a dyadic, is represented by column matrices

$$\mathbf{T} = \left|T_{xx}, T_{yy}, T_{zz}, T_{yz}, T_{xz}, T_{xy}\right|^t = \left|T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6\right|^t \tag{5}$$

This allows to redefine the mathematical formulation as shown in Table 2 where the abstract definition of the electromagnetic field $\left|\mathbf{E}, \mathbf{H}\right|^t$ and of the elastic field $\left|\mathbf{T}, \mathbf{v}\right|^t$ are given in terms of the "wave vector" $\boldsymbol{\psi}$ as in the first and second column of (7), respectively. Using the matrix formalism, the abstract equation (6) gets the same form in electromagnetism and in elasticity. The difference is the Euclidean space where the fields are defined: of order six in electromagnetism and of order nine in elasticity.

Abstract equations in matrix formalism	
Electromagnetism (Euclidean space E_6)	Elasticity (Euclidean space E_9)
(6) $(\Gamma_\nabla - \mathrm{W})\boldsymbol{\psi} = \mathbf{j}$ (defined in E_6) where: $\Gamma_\nabla = \begin{vmatrix} 0 & \nabla\times 1_3 \\ \nabla\times 1_3 & 0 \end{vmatrix}$ $\mathrm{W}=j\omega \begin{vmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{\xi} \\ -\boldsymbol{\zeta} & -\boldsymbol{\mu} \end{vmatrix}$ $\boldsymbol{\psi} = \lvert E_x, E_y, E_z, H_x H_y H_z \rvert^t$ $\mathbf{j} = \lvert -m_x, -m_y, -m_z, j_x, j_y, j_z \rvert^t$	(6) $(\Gamma_\nabla - \mathrm{W})\boldsymbol{\psi} = \mathbf{j}$ (defined in E_9) where: $\Gamma_\nabla = \begin{vmatrix} 0 & (\nabla_T)^t \\ \nabla_T & 0 \end{vmatrix}$, $\nabla_T = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{vmatrix}$, $\mathrm{W} = j\omega \begin{vmatrix} \mathbf{C^{-1}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \rho 1_3 \end{vmatrix}$ $\boldsymbol{\psi} = \lvert T_{xx}, T_{yy}, T_{zz}, T_{yz}, T_{xz}, T_{xy}, v_x, v_y, v_z \rvert^t$ $\mathbf{j} = \lvert f_x, f_y, f_z, h_{xx}, h_{yy}, h_{zz}, h_{zy}, h_{yz}, h_{yy} \rvert^t$

Table 2. Abstract equations using matrix notations in linear electromagnetism (first column) and Elasticity (second column).

4. Transverse equations for the electromagnetic and elastic fields

The mathematical structure in the different areas is the same

$$(7)\quad (\Gamma_{\nabla} - \mathrm{W})\boldsymbol{\psi} = \mathbf{j}$$

and is represented by a by a system of partial differential equations of the first order. The only difference is that this system is of order six in electromagnetism and therefore involves the Euclidean space E6, while in elasticity it is of order nine (E9).

The study of the wave motion in stratified media is significantly simplified if we introduce the transversal equations of the fields. These equations involve only the components of the fields, say $\boldsymbol{\psi}_t$, which are continuous on the layers boundaries. The boundary conditions are obtained by a suitable application of the divergence theorem on equation (7). In particular, in electromagnetism, the boundary conditions show that the continue component are the tangential components $\hat{y} \times \mathbf{E}$ and $\hat{y} \times \mathbf{H}$ with

$$\boldsymbol{\psi}_t = \left| E_z, E_x, 0, H_z, H_x, 0 \right|^t .$$

Similarly, in elasticity we have the continuity of the velocity vector $\mathbf{v}$ and of the vector $\hat{y} \cdot \overline{\mathbf{T}}$; i.e. of all the scalar components v_x, v_y, v_z, with $\mathbf{v} = \left| v_x, v_y, v_z \right|^t = \left| v_1, v_2, v_3 \right|^t$ and of the even components $\left| T_2, T_4, T_6 \right|^t$ of the stress vector T (eq. (5)) [9].

It is remarkable that there exist an abstract deduction of the transverse equations starting from the general first order differential equations (7) [10]. In the electromagnetism, the abstract deduction of the transverse equation leads to (see [3]):

$$(8)\quad \boldsymbol{\psi}_y = \hat{W}_y (I_y \cdot \Gamma_{\nabla_t} - W_{yt}) \cdot \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{t}}$$

$$(9)\quad -\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{\psi}_t = j\mathbf{K}\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x}\right) \cdot \boldsymbol{\psi}_t$$

where

(10) $\psi_t = \left|E_z, E_x, 0, H_z, H_x, 0\right|^t$

(11)

$$\mathbf{K}(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x}) = j\Gamma_y((W_{ty} - \mathbf{I}_t \cdot \Gamma_{\nabla_t}) \cdot \hat{W}_y(\mathbf{I}_y \cdot \Gamma_{\nabla_t} - W_{yt}) + W_{tt}),$$

(12) $\mathbf{I}_t = diag[1,1,0,1,1,0], \quad \mathbf{I}_y = diag[0,0,1,0,0,1]$

(13) $W_{tt} = I_t \cdot W \cdot I_t, \qquad W_{ty} = I_t \cdot W \cdot I_y, \qquad W_{yt} = I_y \cdot W \cdot I_t,$
$W_{yy} = I_y \cdot W \cdot I_y,$

(14) $\hat{W}_y \cdot W_{yy} = W_{yy} \cdot \hat{W}_y = I_y$

In the expression of $\mathbf{K}(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x})$ (11), Γ_{∇_t} is the matrix obtained by Γ_∇ by assuming $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ and Γ_y is obtained by difference. Equation (9) can be defined in E4 because

$\psi_t = \left|E_z, E_x, 0, H_z, H_x, 0\right|^t \rightarrow \left|E_z, E_x, H_z, H_x\right|^t$ and the third and six row of $\mathbf{K}(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x}) \cdot \tilde{\boldsymbol{\psi}}_t$ are vanishing. Equation (14) can be defined in E2 because the first and second rows and the first and second columns of all the matrices involved vanish.In the space E2 we get

(15) $\hat{W}_y = W_{yy}^{-1}$

Similarly, in elasticity, the abstract transverse equations are based on the decomposition of the total field $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}$ and Γ_{∇_t} in two parts:

(16) $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}_t + \boldsymbol{\psi}_y, \quad \Gamma_\nabla = \Gamma_{\nabla_t} + \Gamma_y \dfrac{\partial}{\partial y}$

with

(17) $\mathbf{I}_t = diag[0,1,0,1,0,1,1,1,1], \quad \mathbf{I}_y = diag[1,0,1,0,1,0,0,0,0]$,
and

(18) $\boldsymbol{\psi}_t = \mathbf{I}_t \cdot \boldsymbol{\psi} \ = \left|0, T_2, 0, T_4, 0, T_6, v_1, v_2, v_3\right|^t$

$\boldsymbol{\psi}_y = \mathbf{I}_y \cdot \boldsymbol{\psi} \ = [T_1, 0, T_3, 0, T_5, 0, 0, 0, 0]^t$

Once again, Γ_{∇_t} is the matrix obtained by Γ_∇ by assuming $\dfrac{\partial}{\partial y} = 0$

and Γ_y is obtained by difference.

In particular using MATHEMATICA we have verified the following properties:

(19) $I_y \cdot \Gamma_y = 0 \quad , \quad I_t \cdot \Gamma_y \cdot \dfrac{\partial}{\partial y} \boldsymbol{\psi}_y = 0, I_y \cdot \Gamma_{\nabla_t} \cdot \boldsymbol{\psi}_y = I_y \cdot \boldsymbol{\psi}_y,$
$I_t \cdot \Gamma_y = \Gamma_y \cdot I_t = \Gamma_y, \Gamma_y \cdot \Gamma_y = I_t$

Taking into account these properties, algebraic manipulations on (7) yield the two equations

(20) $\boldsymbol{\psi}_y = \hat{W}_y (I_y \cdot \Gamma_{\nabla_t} - W_{yt}) \cdot \boldsymbol{\psi}_\mathbf{t}$

(21) $-\dfrac{\partial}{\partial y} \tilde{\psi}_t = j\mathbf{K}(\dfrac{\partial}{\partial z}, \dfrac{\partial}{\partial x}) \cdot \tilde{\psi}_t$

where:

(22)

$$\mathbf{K}(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial x})=-j\Gamma_y(-I_t\cdot\Gamma_{\nabla_t}+(W_{ty}-I_t\cdot\Gamma_{\nabla_t})\cdot\hat{W}_y(I_y\cdot\Gamma_{\nabla_t}-W_{yt})+W_{tt})$$

(23) $W_{tt}=I_t\cdot W\cdot I_t$, $W_{ty}=I_t\cdot W\cdot I_y$, $W_{yt}=I_y\cdot W\cdot I_t$, $W_{yy}=I_y\cdot W\cdot I_y$

(24) $\hat{W}_y(W_{yy}-I_y)=(W_{yy}-I_y)\hat{W}_y=I_y$

Equation (20) expresses the not continuous component $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_y$ in terms of the $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_t$. As expected, the second member of this equation does not contain the partial derivative $\frac{\partial}{\partial y}$. Furthermore, the derivative $\frac{\partial}{\partial z}$ and $\frac{\partial}{\partial x}$ in Γ_{∇_t} are only of first order. This equation can be defined in E3 because only the first, third and fifth row of

$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_y=[T_1,0,T_3,0,T_5,0,0,0,0]^t\rightarrow|T_1,T_3,T_5|^t$ and
$\hat{W}_y(I_y\cdot\Gamma_{\nabla_t}-W_{yt})\cdot\tilde{\boldsymbol{\psi}}_t$ are non-zero.

Equation (24) $\hat{W}_y(W_{yy}-I_y)=(W_{yy}-I_y)\hat{W}_y=I_y$ can also be defined in E3 because only the first, third and fifth row and column of the involved matrices are not vanishing. By working in E3 we get:

(25) $\hat{W}_y=(W_{yy}-I_y)^{-1}$

Eq. (21) is the abstract transverse equation. It can be defined in E6 because $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_t=\mathbf{I}_t\cdot\tilde{\boldsymbol{\psi}}=|0,T_2,0,T_4,0,T_6,v_1,v_2,v_3|^t\rightarrow|T_2,T_4,T_6,v_1,v_2,v_3|^t$ and the first, third and six row of $\mathbf{K}(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial x})\cdot\tilde{\boldsymbol{\psi}}_t$ are vanishing. As

expected, the second member of this equation does not contain the partial derivative $\frac{\partial}{\partial y}$. Again the derivative $\frac{\partial}{\partial z}$ and $\frac{\partial}{\partial x}$ derive from the presence of Γ_{∇_t} and in particular they can be of second order for the presence of the matrix $\Gamma_{\nabla_t} \cdot \hat{W}_y \cdot I_y \cdot \Gamma_{\nabla_t}$.

The same form of the transverse equations (9) (electromagnetism) and (21) (elasticity), allows to explicitly solve several important problems.

We mention for example the Sommerfeld problem to study the Radio Propagation over Plane Earth and the Lamb problem in elasticity. In particular, a formal theory to study the radiation of electromagnetic field in arbitrary stratified planar media was presented in [11].

Provided that the field equations are written as first order differential equations as those of Table 2, the transverse equations such equation (21) can be obtained for arbitrary linear fields [12].

Furthermore it is possible to explicitly evaluate the Green's function in arbitrary stratified media starting from the matricant of the transverse equation ([12], [13]).

5. Circuit modeling of layered planar regions

From here on, unless otherwise specified, we will write our equations in the Euclidean space n (n=4 in electromagnetism and n=6 in elasticity).

A planar layered region such as the one depicted in Fig. 1 can be conceived as an open waveguide along the y direction with an unbounded cross-section covering the region $-\infty < x < +\infty$ and $-\infty < z < +\infty$.

In this type of geometries modal analysis, plane wave superposition and Fourier representations converge.

When dealing with waveguides, the modal approach stands out and in the case of full plane cross section the Eigenfunctions have a dependence on the transverse coordinate of the type $\exp(-j\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\rho})$, where $\boldsymbol{\rho} = z\hat{z} + x\hat{x}$, $\boldsymbol{\sigma} = \alpha\hat{z} + \eta\hat{x}$.

This leads to the representation of abstract elements (like $\boldsymbol{\psi}$) and operator (like K) both in the natural and in the spectral (Fourier) domain

$$(26)\quad \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\sigma}, y) = \int_{\boldsymbol{\rho}} \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\rho}, y)\exp(j\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\rho})d\boldsymbol{\rho} = \mathcal{F}(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\rho}, y)),$$

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma}, y) = \mathbf{K}(\frac{\partial}{\partial z} = -j\alpha, \frac{\partial}{\partial x} = -j\eta, y)$$

In electromagnetism, the representation in the spectral domain defines the voltages and the currents which are the coefficients of the modal representations

$$(27)\quad \mathbf{V}(\boldsymbol{\sigma}, y) = \mathbf{V}(y) = \int_{\boldsymbol{\rho}} \mathbf{E}_t(\boldsymbol{\rho}, y)\exp(j\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\rho})d\boldsymbol{\rho} = \mathcal{F}(\mathbf{E}_\mathbf{t}),$$

$$(28)\quad \mathbf{I}(\boldsymbol{\sigma}, y) = \mathbf{I}(y) = \int_{\boldsymbol{\rho}} \mathbf{H}_t(\boldsymbol{\rho}, y)\exp(j\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\rho})d\boldsymbol{\rho} = \mathcal{F}(\mathbf{H}_\mathbf{t})$$

where:

$$\mathbf{E}_t = \left|E_z, E_x\right|^t, \quad \mathbf{H}_\mathbf{t} = \left|H_z, H_x\right|^t.$$

In order to keep the correspondence between electromagnetism and elasticity we introduce voltage and currents for the continuous component of the stress and the velocity:

(29)

$$\mathbf{V}(\boldsymbol{\sigma}, y) = \mathbf{V}(y) = \int_{\boldsymbol{\rho}} \begin{vmatrix} T_2(\boldsymbol{\rho}, y) \\ T_4(\boldsymbol{\rho}, y) \\ T_6(\boldsymbol{\rho}, y) \end{vmatrix} \exp(j\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho}, \quad \mathbf{I}(\boldsymbol{\sigma}, y) = \mathbf{I}(y) = \int_{\boldsymbol{\rho}} \begin{vmatrix} v_x(\boldsymbol{\rho}, y) \\ v_y(\boldsymbol{\rho}, x) \\ v_z(\boldsymbol{\rho}, y) \end{vmatrix} \exp(j\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho}$$

Consider now a homogeneous region free of sources. The transverse differential equation can be written as:

$$(30) \quad -\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{\psi}_t(\boldsymbol{\sigma}, y) = j\mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma})\cdot\boldsymbol{\psi}_t(\boldsymbol{\sigma}, y), \qquad \psi_t(\eta, y) = \left|\mathbf{V}(\eta, y), \mathbf{I}(\eta, y)\right|^t$$

which can be integrated in the form:

(31)

$$\boldsymbol{\psi}_t(\boldsymbol{\sigma}, y) = \exp(-j\mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma})\cdot(y - y'))\cdot\boldsymbol{\psi}_t(\boldsymbol{\sigma}, y') = \mathcal{T}(\boldsymbol{\sigma}, y - y')\cdot\boldsymbol{\psi}_t(\boldsymbol{\sigma}, y')$$

where $\mathsf{T}(y, y')$ is the transmission operator from plane y' to plane y

$$(32) \quad \mathsf{T}(\boldsymbol{\sigma}, y - y') = \exp(-j\mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma})(y - y'))$$

The network representation of a multilayered region requires to obtain the network representation of:

- A half space like the upper region y>0 in fig. 1
- A single slab
- A multi slab

5.1. Circuit representation of a homogeneous half-space. Characteristic impedance of a medium

The concept of *Characteristic Impedance* in a homogeneous medium is fundamental in propagation and radiation as well as in the circuit approach of stratified media.

Assume that the region y>yl is homogeneous and free of sources. It follows that the voltage V(y) and current I(y) are proportional

$$(33) \qquad \mathbf{V}(\sigma, y) = \mathbf{Z}_c(\sigma)\cdot\mathbf{I}(\sigma, y)$$

where $\mathbf{Z}_c(\sigma)$, square matrix of order n/2, is the characteristic impedance of the $\boldsymbol{\sigma}$-wave in the considered medium.

In general the characteristic impedance in a medium can be evaluated in terms of Eigen-vectors of $\mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma})$ (see section 7).

In electromagnetism, in the very simple case of isotropic medium ($\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_o$, $\mu = \mu_r \mu_o$) each spectral solution is a plane wave with propagation constant

(34) $$k(\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon) = \eta \hat{x} + \sqrt{\varepsilon_r k_o^2 - \sigma^2}\, \hat{y} + \alpha \hat{z} = \sqrt{\varepsilon_r} k_o \hat{k}$$

and it obeys to the plane wave impedance relation

(35) $$\mathbf{E} = \frac{Z_o}{\sqrt{\varepsilon_r}} \mathbf{H} \times \hat{k},$$

Recalling that: $\hat{k} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{H} \cdot \hat{k} = 0$, equations (33) and (35) lead to:

(36) $$Z_c(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{Z_o / \sqrt{\varepsilon_r}}{k\sqrt{k^2 - \alpha^2 - \eta^2}} \begin{vmatrix} \eta\alpha & k^2 - \alpha^2 \\ -(k^2 - \eta)^2 & -\eta\alpha \end{vmatrix}$$

with $k = \sqrt{\varepsilon_r} k_o$

Because of eq. (33), the circuit representation of the half-space, for any y>yu, is a simple one port component of impedance $\mathbf{Z}_c(\boldsymbol{\sigma})$ (Fig. 2).

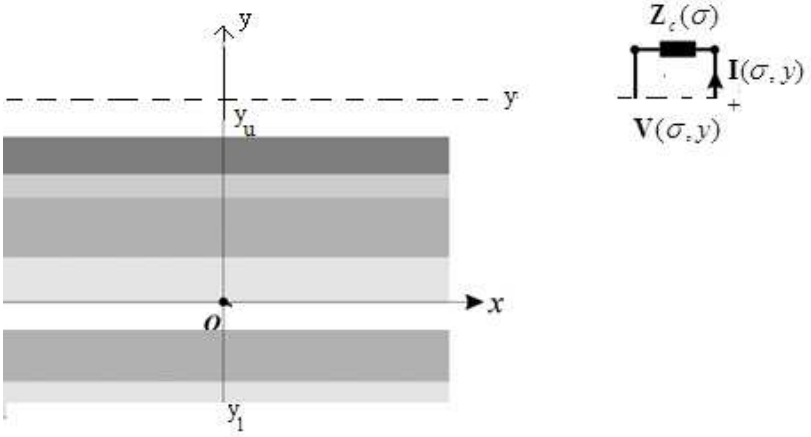


Fig. 2. Circuit model of the homogeneous free of source region y>yu.

5.2. The circuit representation of a slab

With reference to Fig. 3, let us consider a homogeneous slab in the region $0 \le y \le d$, equation (30) yields

$$\begin{vmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{I}_0 \end{vmatrix} = \mathsf{T}(d) \begin{vmatrix} \mathbf{V}_d \\ \mathbf{I}_d \end{vmatrix} \tag{37}$$

with:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 &= \mathbf{V}\big|_{y=0}, \quad \mathbf{I}_0 = \mathbf{I}\big|_{y=0} \\ \mathbf{V}_d &= \mathbf{V}\big|_{y=d}, \quad \mathbf{I}_d = \mathbf{I}\big|_{y=d} \end{aligned} \tag{38}$$

and where $\mathsf{T}(d) = \mathsf{T}(y, \boldsymbol{\sigma}) = e^{j\mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma})d} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}(\boldsymbol{\sigma}) & \mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}) \\ \mathbf{C}(\boldsymbol{\sigma}) & \mathbf{D}(\boldsymbol{\sigma}) \end{vmatrix}$ is the transmission matrix of the slab 0<y<d . In this case it is convenient to introduce a two-port component that models the slab (Fig. 3).

This representation also applies to a cascade sequence of slabs. For example for the four slabs 1,2,3, 4… of Fig. 4 the transmission matrix of the multi-layer slab is the product of the transmission matrices relevant to the different slabs

$$\mathsf{T} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = \mathsf{T}_1 \mathsf{T}_2 \mathsf{T}_3 \mathsf{T}_4 \ldots = e^{j\mathbf{K}_1 d_1} e^{j\mathbf{K}_2 d_2} e^{j\mathbf{K}_3 d_3} e^{j\mathbf{K}_4 d_4} \ldots \tag{39}$$

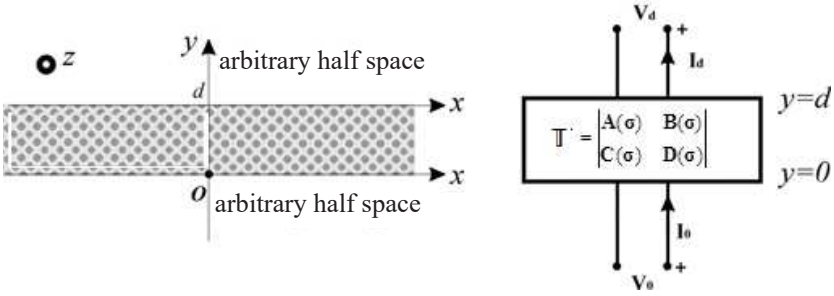


Fig. 3. Left: slab filled by arbitrary linear medium in elasticity. Right: equivalent network in the Fourier domain.

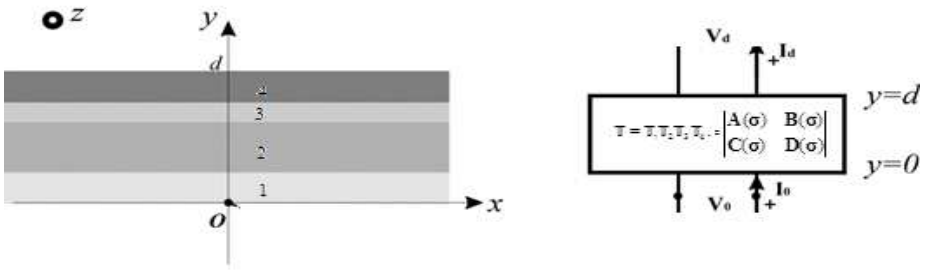


Fig. 4. The representation of a multi layer slab with a two port component.

5.3. One port representation of a stratified region

If we look to the input impedance of a multilayered region with un upper half space of characteristic impedance Z_{cd} we can refer to the circuit representation given in Fig. 5.

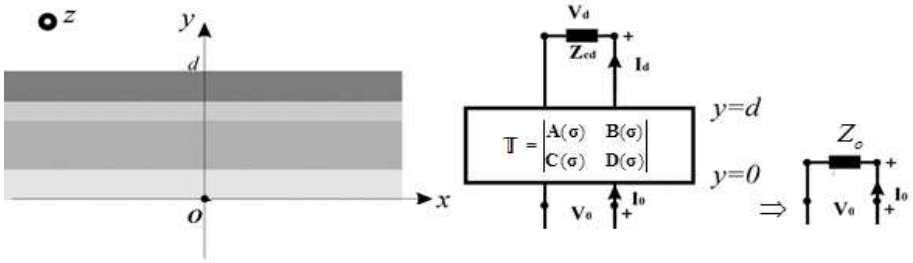


Fig. 5. The one-port representation of a stratified region.

Taking into account the equations of the two port that model the multilayer located in $0 \le y \le d$

$$\begin{aligned} V_o &= AV_d + BI_d, \\ I_o &= CV_d + DI_d, \end{aligned} \tag{40}$$

and of the equation

$$V_d = Z_{cd} I_d \tag{41}$$

of the one port component that models the half-space y>yd, we get:

(42) $$Z_o = (AZ_{cd} + B)(CZ_{cd} + D)^{-1}$$

5.4. Thevenin and Norton representation

In elasticity, the plane of separation between a solid and air is called a traction –free plane because by neglecting the pressure on the air the continuous stress $|T_2, T_4, T_6|^t = \mathbf{V}(y_o)$ must be zero. In circuit modeling, $\mathbf{V}(y_o) = 0$ means that this plane corresponds to a Perfectly Electric Conducting (PEC) plane. Similarly, if the plane is rigid, i.e. $|v_x, v_y, v_z|^t = \mathbf{I}(y_o) = 0$, we deal with a Perfectly Magnetic Conducting plane (PMC). If we define the impedance (admittance) matrices Z ($Y = Z^{-1}$) that link $\mathbf{V}$ to $\mathbf{I}$ through the equations $\mathbf{V} = Z\,\mathbf{I}$ ($\mathbf{I} = Y\,\mathbf{V}$) we get Z=0 and Y=0 on the traction-free plane and on the rigid plane, respectively.

Let us the half space y>yo where stratified elastic media and arbitrary elastic sources can be present. The linearity of the problem dictates that $\mathbf{V}(\boldsymbol{\sigma}, y_o)$ and $\mathbf{I}(\boldsymbol{\sigma}, y_o)$ satisfy the equation:

(43) $$\mathbf{V} = \mathbf{V}_o + Z_e \mathbf{I}$$

With

$\mathbf{V} = \mathbf{V}(\boldsymbol{\sigma}, y_o)$ $\quad \mathbf{I} = \mathbf{I}(\boldsymbol{\sigma}, y_o)$

$\mathbf{V}_o = \mathbf{V}_o(\boldsymbol{\sigma})$ and $Z_e = Z_e(\boldsymbol{\sigma})$ are called the Thevenin voltage and the Thevenin impedance, respectively.

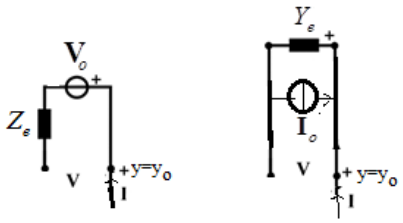


Fig. 6. Thevenin and Norton representations of the half space y>yo.

The Thevenin voltage $\mathbf{V}_s$ is the voltage evaluated at y=yo assuming that the y = yo plane is replaced by a PMC plane. The impedance $\mathbf{Z}_e$ is the matrix of order n/2 that relates $\mathbf{V}$ and $\mathbf{I}$ when in the region y>yo the sources vanish. The circuit model of the region y>yo is shown in Fig. 6. The Norton representation can be obtained by the Thevenin representation by duality (Fig.6). In particular the Norton equation is $\mathbf{I} = -\mathbf{I}_o + Y_e \mathbf{V}$ where $\mathbf{I}_o = -Y_e \mathbf{V}_o$ and $Y_e = Z_e^{-1}$ are the Norton current and admittance, respectively. Similar consideration applies in the stratified region located in y<yo.

5.5. Circuit representation of Discontinuity planes

Recall that for stratified media on the interfaces between different slabs $\mathbf{V}(\boldsymbol{\sigma})$ and $I(\boldsymbol{\sigma})$ are continuous. Conversely, if at $y = y_o$ there is a planar discontinuity like a metallic half pane or patch or strip (Fig. 7), the presence of the discontinuity destroys the continuity of $\boldsymbol{\psi}_t(\boldsymbol{\sigma}, y)$. It means that $\boldsymbol{\psi}_t(\boldsymbol{\sigma}, y_{o+}) \neq \boldsymbol{\psi}_t(\boldsymbol{\sigma}, y_{o-})$

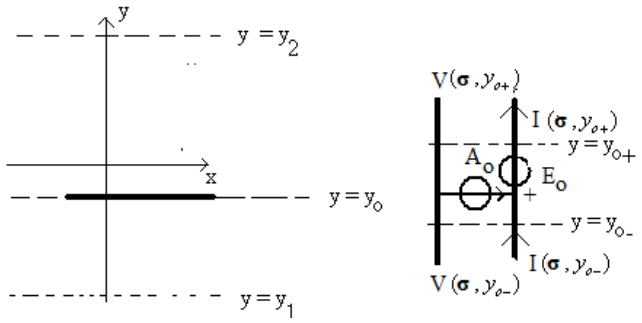


Fig. 7. Circuit representation of planar discontinuity.

We can model this discontinuity by introducing a current and a voltage generators given respectively by:

(44) $\mathbf{A}_o = \mathbf{A}_o(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{I}(\boldsymbol{\sigma}, y_{o+}) - \mathbf{I}(\boldsymbol{\sigma}, y_{o-})$

(45) $\mathbf{E}_o = \mathbf{E}_o(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{V}(\boldsymbol{\sigma}, y_{o+}) - \mathbf{V}(\boldsymbol{\sigma}, y_{o-})$

6. The eigenvalues and the eigenvectors of $\mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma})$

The abstract expression of $\mathbf{K}(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial x})$ in the Fourier domain $\frac{\partial}{\partial z}=-j\alpha$, $\frac{\partial}{\partial x}=-j\eta$ assumes the form:

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma}) = j\Gamma_y((W_{ty} - \mathbf{I}_t \cdot \Gamma_{-j\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \hat{W}_y(\mathbf{I}_y \cdot \Gamma_{-j\boldsymbol{\sigma}} - W_{yt}) + W_{tt})$$

(electromagnetism)

(46)

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma}) = -j\Gamma_y(-I_t \cdot \Gamma_{-j\boldsymbol{\sigma}} + (W_{ty} - I_t \cdot \Gamma_{-j\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \hat{W}_y(I_y \cdot \Gamma_{-j\boldsymbol{\sigma}} - W_{yt}) + W_{tt})$$

(elasticity).

The explicit evaluation requires several algebraic elaborations that we did by using MATHEMATICA. For sake of brevity, we report here only the explicit expression of $\mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma})$ for isotropic electromagnetic media and for isotropic elastic media

For an isotropic electromagnetic medium we get:

(47)

$$K[\sigma] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{Zco\,\alpha\,\eta}{k} & \frac{Zco\,(k-\alpha)\,(k+\alpha)}{k} \\ 0 & 0 & -k\,Zco + \frac{Zco\,\eta^2}{k} & -\frac{Zco\,\alpha\,\eta}{k} \\ -\frac{\alpha\,\eta}{k\,Zco} & \frac{-k^2+\alpha^2}{k\,Zco} & 0 & 0 \\ \frac{(k-\eta)\,(k+\eta)}{k\,Zco} & \frac{\alpha\,\eta}{k\,Zco} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

with

$$v = \sqrt{\frac{1}{\mu\varepsilon}} \quad , \quad Z_{co} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad k = \frac{\omega}{v},$$

being ε e μ the permettivity and the permeability of the medium, respectively.

In the above definition v represents the phase velocity, Z_{co} the impedance and k the propagation constant of the medium.

For an isotropic elastic medium we get:

(48)

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma})=-j\begin{pmatrix} 0 & -j\alpha & -j\eta & 0 & -jk_sZ_o & 0 \\ -j\alpha(1-\frac{2k_p^2}{k_s^2}) & 0 & 0 & \frac{j\alpha\eta\left(-4k_p^2+3k_s^2\right)Z_o}{k_s^3} & 0 & \frac{j\left(k_s^4-\left(\eta^2+4\alpha^2\right)k_s^2+4\alpha^2k_p^2\right)Z_o}{k_s^3} \\ -j\eta(1-\frac{2k_p^2}{k_s^2}) & 0 & 0 & \frac{j\left(k_s^4-\left(4\eta^2+\alpha^2\right)k_s^2+4\eta^2k_p^2\right)Z_o}{k_s^3} & 0 & \frac{j\left(-4k_p^2+3k_s^2\right)Z_o\alpha\eta}{k_s^3} \\ 0 & 0 & \frac{jk_s}{Z_o} & 0 & -j\eta & 0 \\ \frac{jk_p^2}{k_sZ_o} & 0 & 0 & -j\eta(1-\frac{2k_p^2}{k_s^2}) & 0 & -j\alpha(1-\frac{2k_p^2}{k_s^2}) \\ 0 & \frac{jk_s}{Z_o} & 0 & 0 & -j\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

with

$$v_p=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} \qquad v_s=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad Z_o=\sqrt{\rho\mu}, \quad k_p=\frac{\omega}{v_p}, \quad k_s=\frac{\omega}{v_s}$$

being λ *e* μ *the Lame parameters and* ρ the density of the medium.

In the above definition v_p and v_s represents the phase velocities of the principal (longitudinal) wave and of the secondary (transversal V and transversal H) waves, while k_p and k_s are the corresponding propagation constants.

The eigenvalues ξ_i and the eigenvectors $\boldsymbol{\psi}^{(i)}$ of the matrix $K=K(\boldsymbol{\sigma})$ of order n are defined by the equation:

(49) $K(\boldsymbol{\sigma})\cdot\boldsymbol{\psi}^{(i)}(\boldsymbol{\sigma})=\xi_i(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\psi}^{(i)}(\boldsymbol{\sigma})$ (i=1,2…,n)

They are very important in the study of the solution of the equation (49). For example they allow the evaluation of functions of K, such the exponentials that appears in (32) or (39).

The Jordan decomposition $K=UJU^{-1}$ provides the eigenvalues $\xi_i(\boldsymbol{\sigma})$ and the eigenvectors $\boldsymbol{\psi}^{(i)}(\boldsymbol{\sigma})$ of K . In fact, in this representation

(50) $J=diag[\xi_1(\boldsymbol{\sigma}),..,\xi_n(\boldsymbol{\sigma})]$

(51) $U=[\boldsymbol{\psi}^{(1)}(\boldsymbol{\sigma}),..,\boldsymbol{\psi}^{(n)}(\boldsymbol{\sigma})]$

where

$$\boldsymbol{\psi}^{(i)}(\boldsymbol{\sigma}) = \left|\psi_1^{(i)}(\boldsymbol{\sigma}), \psi_2^{(i)}(\boldsymbol{\sigma}), \psi_3^{(i)}(\boldsymbol{\sigma}), \psi_4^{(i)}(\boldsymbol{\sigma}), \psi_5^{(i)}(\boldsymbol{\sigma}), \ldots, \psi_n^{(i)}(\boldsymbol{\sigma})\right|^t .$$

It is remarkable that the matrices $K = K(\boldsymbol{\sigma})$ both in electromagnetism and in elasticity are always semisimple. It means that their eigenvectors constitute a base in the E4 and E6 respectively. Furthermore the matrices J and U are readily evaluated by MATHEMATICA .

In particular, for isotropic electromagnetic waves (see eq. 47) MATHEMATICA gives:

(52) $J = diag[\xi_1(\boldsymbol{\sigma}), .., \xi_4(\boldsymbol{\sigma})]$

(53)

$$U = \begin{vmatrix} Z_{co}\dfrac{k^2-\alpha^2}{k\xi} & Z_{co}\dfrac{\alpha\ \eta}{k\xi} & -Z_{co}\dfrac{k^2-\alpha^2}{k\xi} & -Z_{co}\dfrac{\alpha\ \eta}{k\xi} \\ -Z_{co}\dfrac{\alpha\ \eta}{k\xi} & -Z_{co}\dfrac{k^2-\alpha^2}{k\xi} & Z_{co}\dfrac{\alpha\ \eta}{k\xi} & Z_{co}\dfrac{k^2-\alpha^2}{k\xi} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

where $\xi = \xi(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{k^2-\alpha^2-\eta^2}$,

(54) $\xi_1 = \xi(\boldsymbol{\sigma}), \quad \xi_2 = \xi(\boldsymbol{\sigma}),$
$\xi_3 = -\xi(\boldsymbol{\sigma}), \quad \xi_4 = -\xi(\boldsymbol{\sigma}),$

In presence of a passive medium, the first two eigenvalues $\xi_i = \xi_i(\boldsymbol{\sigma})$ (for i=1,2) have negative imaginary part while the other two (i=3,4) have positive imaginary part.

It follows that in an indefinite electromagnetic upper medium the solution of (30) must have the form

(55) $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_t(y, \boldsymbol{\sigma}) = C_{o1} e^{-j\xi_1 y} \boldsymbol{\psi}^{(1)}(\boldsymbol{\sigma}) + C_{o2} e^{-j\xi_2 y} \boldsymbol{\psi}^{(2)}(\boldsymbol{\sigma}), \quad y \to +\infty$

and in the indefinite electromagnetic lower medium the solution of (30) must have the form

(56) $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_t(y, \boldsymbol{\sigma}) = C_{o3} e^{-j\xi_3 y} \boldsymbol{\psi}^{(3)}(\boldsymbol{\sigma}) + C_{o4} e^{-j\xi_4 y} \boldsymbol{\psi}^{(4)}(\boldsymbol{\sigma}), \quad y \to -\infty$

For this reason $\boldsymbol{\psi}^{(i)}(\boldsymbol{\sigma})$ (i=1,2) are called progressive eigenvectors and $\boldsymbol{\psi}^{(i)}(\boldsymbol{\sigma})$ (i=3,4) are called regressive eigenvectors.

Similarly, in isotropic elastic waves (see eq.48) MATHEMATICA gives:

(57) $$J = diag[\xi_1(\boldsymbol{\sigma}),..,\xi_6(\boldsymbol{\sigma})]$$

(58)

$$U[\alpha,\eta] = \begin{pmatrix} \frac{\beta_o\left(-k_s^2+2\left(\alpha^2+\eta^2\right)\right)}{k_s\alpha} & -\frac{2\beta_o\xi_s}{k_s} & 0 & \frac{\beta_o\left(-k_s^2+2\left(\alpha^2+\eta^2\right)\right)}{k_s\alpha} & \frac{2\beta_o\xi_s}{k_s} & 0 \\ -\frac{2\beta_o\xi_p}{k_s} & -\frac{\beta_o\alpha}{k_s} & -\frac{\beta_o\xi_s}{k_s} & \frac{2\beta_o\xi_p}{k_s} & -\frac{\beta_o\alpha}{k_s} & \frac{\beta_o\xi_s}{k_s} \\ -\frac{2\beta_o\eta\xi_p}{k_s\alpha} & \frac{\beta_o\left(k_s^2-\alpha^2-2\eta^2\right)}{k_s\eta} & \frac{\beta_o\alpha\xi_s}{k_s\eta} & \frac{2\beta_o\eta\xi_p}{k_s\alpha} & \frac{\beta_o\left(k_s^2-\alpha^2-2\eta^2\right)}{k_s\eta} & -\frac{\beta_o\alpha\xi_s}{k_s\eta} \\ \frac{\eta}{\alpha} & -\frac{\xi_s}{\eta} & -\frac{\alpha}{\eta} & \frac{\eta}{\alpha} & \frac{\xi_s}{\eta} & -\frac{\alpha}{\eta} \\ \frac{\xi_p}{\alpha} & 1 & 0 & -\frac{\xi_p}{\alpha} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

with

$$\xi_p = \xi_p(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{k_p^2-\alpha^2-\eta^2}, \quad \xi_s = \xi_s(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{k_s^2-\alpha^2-\eta^2}$$

(59)
$$\xi_1 = \xi_p(\boldsymbol{\sigma}), \quad \xi_2 = \xi_s(\boldsymbol{\sigma}), \quad \xi_3 = \xi_s(\boldsymbol{\sigma}),$$
$$\xi_4 = -\xi_p(\boldsymbol{\sigma}), \quad \xi_5 = -\xi_s(\boldsymbol{\sigma}), \quad \xi_6 = -\xi_s(\boldsymbol{\sigma})$$

In presence of a passive medium the first three eigenvalues $\xi_i = \xi_i(\boldsymbol{\sigma})$ (for i=1,2,3) have negative imaginary part and the other three (i=4,5,6) have positive imaginary part.

It follows that in an indefinite elastic upper medium the solution of (30) must have the form

(60)
$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_t(y,\boldsymbol{\sigma}) = C_{o1}e^{-j\xi_1 y}\boldsymbol{\psi}^{(1)}(\boldsymbol{\sigma}) + C_{o2}e^{-j\xi_2 y}\boldsymbol{\psi}^{(2)}(\boldsymbol{\sigma}) + C_{o3}e^{-j\xi_3 y}\boldsymbol{\psi}^{(3)}(\boldsymbol{\sigma}),$$
$$y \to +\infty$$

and in an indefinite elastic lower medium the solution of (30) must have the form

(61)
$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_t(y,\boldsymbol{\sigma}) = C_{o4}e^{-j\xi_4 y}\boldsymbol{\psi}^{(4)}(\boldsymbol{\sigma}) + C_{o5}e^{-j\xi_5 y}\boldsymbol{\psi}^{(5)}(\boldsymbol{\sigma}) + C_{o6}e^{-j\xi_6 y}\boldsymbol{\psi}^{(6)}(\boldsymbol{\sigma}),$$
$$y \to -\infty$$

Whence $\boldsymbol{\psi}^{(i)}(\boldsymbol{\sigma})$ (i=1,2,3) are called progressive eigenvectors and $\boldsymbol{\psi}^{(i)}(\boldsymbol{\sigma})$ (i=4,5,6) are called regressive eigenvectors.

7. Evaluation of the characteristic impedances

Let us write the components of the eigenvectors in the form

(62) $\boldsymbol{\psi}^{(i)}(\boldsymbol{\sigma}) = \left|\mathbf{V}^{(i)}(\boldsymbol{\sigma}), \mathbf{I}^{(i)}(\boldsymbol{\sigma})\right|$

where:

(63) $$\mathbf{V}^{(i)} = \begin{vmatrix} \psi_1^{(i)} \\ \psi_2^{(i)} \\ ..... \\ \psi_{n/2}^{(i)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} V_1^{(i)} \\ V_2^{(i)} \\ ..... \\ V_{n/2}^{(i)} \end{vmatrix}, \mathbf{I}_i = \begin{vmatrix} \psi_{1+n/2}^{(i)} \\ \psi_{2+n/2}^{(i)} \\ ..... \\ \psi_n^{(i)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_1^{(i)} \\ I_2^{(i)} \\ .... \\ I_{n/2}^{(i)} \end{vmatrix} \quad i = 1,2,,...,n$$

It follows, for y>0:

(64) $$\mathbf{V}(y) = \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \\ .... \\ V_{n/2} \end{vmatrix} == \begin{vmatrix} V_1^{(1)} & V_1^{(2)} \ldots & V_1^{(n/2)} \\ V_2^{(1)} & V_2^{(2)} \ldots & V_2^{(n/2)} \\ .... & .... & \ldots \\ V_{n/2}^{(1)} & V_{n/2}^{(2)} \ldots & V_{n/2}^{(n/2)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} C_{o1} e^{-j\xi_1 y} \\ C_{o2} e^{-j\xi_2 y} \\ \\ C_{on/2} e^{-j\xi_{n/2} y} \end{vmatrix}$$

(65) $$\mathbf{I}(y) = \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ .... \\ I_{n/2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_1^{(1)} & I_1^{(2)} \ldots & I_1^{(n/2)} \\ I_2^{(1)} & I_2^{(2)} \ldots & I_2^{(n/2)} \\ .... & .... & \ldots \\ I_{n/2}^{(1)} & I_{n/2}^{(2)} \ldots & I_{n/2}^{(n/2)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_{o1} e^{-j\xi_1 y} \\ C_{o2} e^{-j\xi_2 y} \\ \\ C_{on/2} e^{-j\xi_n y} \end{vmatrix}$$

By eliminating the vector $\begin{vmatrix} C_{o1} e^{-j\xi_1 y} \\ C_{o2} e^{-j\xi_2 y} \\ \\ C_{on/2} e^{-j\xi_{n/2} y} \end{vmatrix}$, (64) and (65) yield:

(66) $\mathbf{V}(y) = \mathbf{Z}_{cu}\,\mathbf{I}(y),\ y > 0$

with

(67) $\mathbf{Z}_{cu} = \mathbf{Z}_{cu}(\boldsymbol{\sigma}) = \begin{vmatrix} V_1^{(1)} & V_1^{(2)} \ldots & V_1^{(n/2)} \\ V_2^{(1)} & V_2^{(2)} \ldots & V_2^{(n/2)} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots \\ V_{n/2}^{(1)} & V_{n/2}^{(2)} \ldots & V_{n/2}^{(n/2)} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} I_1^{(1)} & I_1^{(2)} \ldots & I_1^{(n/2)} \\ I_2^{(1)} & I_2^{(2)} \ldots & I_2^{(n/2)} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots \\ I_{n/2}^{(1)} & I_{n/2}^{(2)} \ldots & I_{n/2}^{(n/2)} \end{vmatrix}^{-1}$

Similarly for an indefinite lower medium y<0 we have:

(68) $\mathbf{V}(y) = -\mathbf{Z}_{cl})\mathbf{I}(y),\ y < 0$

where the characteristic impedance $\mathbf{Z}_{cl} = \mathbf{Z}_{cl}(\boldsymbol{\sigma})$ is defined by:

(69) $\mathbf{Z}_{cl} = -\begin{vmatrix} V_1^{(1+n/2)} & V_1^{(2+n/2)} \ldots & V_1^{(n)} \\ V_2^{(1+n/2)} & V_2^{(2+n/2)} \ldots & V_2^{(n)} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots \\ V_{n/2}^{(1+n/2)} & V_{n/2}^{(2+n/2)} \ldots & V_{n/2}^{(n)} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} I_1^{(1+n/2)} & I_1^{(2+n/2)} \ldots & I_1^{(n)} \\ I_2^{(1+n/2)} & I_2^{(2+n/2)} \ldots & I_2^{(n)} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots \\ I_{n/2}^{(1+n/2)} & I_{n/2}^{(2+n/2)} \ldots & I_{n/2}^{(n)} \end{vmatrix}^{-1}$

Using the eigenvalues and the eigenvectors of the matrix K, the transmission matrix $e^{jK(\sigma)d}$ is obtained by

(70) $e^{jK(\sigma)d} = Ue^{Jd}U^{-1}$

where $e^{Jd} = diag[e^{j\xi_1(\sigma)d},..,e^{j\xi_n(\sigma)d}]$.

By applying the previous general procedure we get the following results.
For an isotropic electromagnetic medium:

(71) $Z_c(\boldsymbol{\sigma}) = \dfrac{Z_o / \sqrt{\varepsilon_r}}{k\sqrt{k^2 - \alpha^2 - \eta^2}} \begin{vmatrix} \eta\alpha & k^2 - \alpha^2 \\ -(k^2 - \eta)^2 & -\eta\alpha \end{vmatrix}$

with $k = \sqrt{\varepsilon_r}\,k_o$

Notice that this agrees with eq.(36) where $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_o$

For an isotropic elastic medium:

(72) $Z_{cu}(\boldsymbol{\sigma}) = (Y_{cu}(\boldsymbol{\sigma}))^{-1}, \quad Z_{cl}(\boldsymbol{\sigma}) = (Y_{cl}(\boldsymbol{\sigma}))^{-1}$

where[1]:

(73)

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Ycu}[\sigma] = \\
&\Big\{\Big\{\frac{2\,\mathbf{ks}\,(\alpha^2+\eta^2)\,(\alpha\,(\eta+\xi\mathbf{p})+\eta\,\xi\mathbf{s})-\mathbf{ks}^3\,(2\,\alpha\,(\eta+\xi\mathbf{p})+\eta\,\xi\mathbf{s})}{\mathrm{Zo}\,(4\,\mathbf{ks}^2\,(\alpha^2+\eta^2)\,(\xi\mathbf{p}-\xi\mathbf{s})+\mathbf{ks}^4\,\xi\mathbf{s}+4\,(\alpha^2+\eta^2)^2\,(-\xi\mathbf{p}+\xi\mathbf{s}))},\\
&\quad\frac{\mathbf{ks}\,\alpha\,(\mathbf{ks}^2-\alpha^2-\eta^2)\,(\mathbf{ks}^2-2\,(\alpha^2+\alpha\,\eta+\eta^2))}{\mathrm{Zo}\,\eta\,(4\,\mathbf{ks}^2\,(\alpha^2+\eta^2)\,(\xi\mathbf{p}-\xi\mathbf{s})-4\,(\alpha^2+\eta^2)^2\,(\xi\mathbf{p}-\xi\mathbf{s})+\mathbf{ks}^4\,\xi\mathbf{s})},\\
&\quad\frac{\mathbf{ks}\,\alpha\,(2\,(\alpha^2+\eta^2)\,(\eta^2-\alpha\,\xi\mathbf{s})+\mathbf{ks}^2\,(-2\,\eta^2+\alpha\,\xi\mathbf{s}))}{\mathrm{Zo}\,\eta\,(4\,\mathbf{ks}^2\,(\alpha^2+\eta^2)\,(\xi\mathbf{p}-\xi\mathbf{s})-4\,(\alpha^2+\eta^2)^2\,(\xi\mathbf{p}-\xi\mathbf{s})+\mathbf{ks}^4\,\xi\mathbf{s})}\Big\},\\
&\Big\{\frac{\mathbf{ks}\,(\mathbf{ks}^2\,\alpha\,(\eta+\xi\mathbf{p})-2\,(\alpha^2+\eta^2)\,(\eta\,\xi\mathbf{p}+\alpha\,(\eta+\xi\mathbf{p})))\,\xi\mathbf{s}}{\mathrm{Zo}\,\alpha\,(4\,\mathbf{ks}^2\,(\alpha^2+\eta^2)\,(\xi\mathbf{p}-\xi\mathbf{s})-4\,(\alpha^2+\eta^2)^2\,(\xi\mathbf{p}-\xi\mathbf{s})+\mathbf{ks}^4\,\xi\mathbf{s})},\\
&\quad\frac{-2\,\mathbf{ks}\,(\alpha^2+\eta^2)\,((\alpha^2+\eta^2)\,\xi\mathbf{p}+\alpha\,\eta\,\xi\mathbf{s})+\mathbf{ks}^3\,(2\,(\alpha^2+\eta^2)\,\xi\mathbf{p}+\alpha\,\eta\,\xi\mathbf{s})}{\mathrm{Zo}\,\eta\,(4\,\mathbf{ks}^2\,(\alpha^2+\eta^2)\,(\xi\mathbf{p}-\xi\mathbf{s})-4\,(\alpha^2+\eta^2)^2\,(\xi\mathbf{p}-\xi\mathbf{s})+\mathbf{ks}^4\,\xi\mathbf{s})},\\
&\quad\frac{\mathbf{ks}\,(\mathbf{ks}^2\,\eta^2+2\,(\alpha^2+\eta^2)\,(-\eta^2+\alpha\,\xi\mathbf{p}))\,\xi\mathbf{s}}{\mathrm{Zo}\,\eta\,(4\,\mathbf{ks}^2\,(\alpha^2+\eta^2)\,(\xi\mathbf{p}-\xi\mathbf{s})-4\,(\alpha^2+\eta^2)^2\,(\xi\mathbf{p}-\xi\mathbf{s})+\mathbf{ks}^4\,\xi\mathbf{s})}\Big\},\\
&\Big\{\big(-\mathbf{ks}^5\,\xi\mathbf{p}+\mathbf{ks}^3\,\big(-\alpha^2\,(\eta-3\,\xi\mathbf{p})+2\,\alpha\,\eta\,\xi\mathbf{p}+4\,\eta^2\,\xi\mathbf{p}\big)+2\,\mathbf{ks}\,\big(\alpha^2+\eta^2\big)\,\big(\alpha^2\,\eta-\big(\alpha^2+\alpha\,\eta+2\,\eta^2\big)\,\xi\mathbf{p}\big)+\\
&\qquad 4\,\mathbf{ks}\,\eta\,\big(-\mathbf{kp}^2\,\eta+\eta^3+\alpha^2\,(\eta+\xi\mathbf{p})\big)\,\xi\mathbf{s}\big)\Big/\big(\mathrm{Zo}\,\alpha\,\big(4\,\mathbf{ks}^2\,\big(\alpha^2+\eta^2\big)\,(\xi\mathbf{p}-\xi\mathbf{s})-4\,\big(\alpha^2+\eta^2\big)^2\,(\xi\mathbf{p}-\xi\mathbf{s})+\mathbf{ks}^4\,\xi\mathbf{s}\big)\big),\\
&\quad-\frac{\mathbf{ks}\,\eta\,(\mathbf{ks}^2-\alpha^2-2\,\eta^2)\,(\mathbf{ks}^2-2\,(\alpha^2+\eta^2))+2\,\mathbf{ks}\,(\mathbf{ks}^2\,\alpha-\alpha^3-\alpha\,\eta^2+2\,\eta^3)\,\xi\mathbf{p}\,\xi\mathbf{s}}{\mathrm{Zo}\,\eta\,(4\,\mathbf{ks}^2\,(\alpha^2+\eta^2)\,(\xi\mathbf{p}-\xi\mathbf{s})-4\,(\alpha^2+\eta^2)^2\,(\xi\mathbf{p}-\xi\mathbf{s})+\mathbf{ks}^4\,\xi\mathbf{s})},\\
&\quad-\frac{\mathbf{ks}\,\alpha\,(-2\,(\alpha^2+\eta^2)\,(\eta^2+\alpha\,\xi\mathbf{p})+\mathbf{ks}^2\,(\eta^2+2\,\alpha\,\xi\mathbf{p})-4\,\eta^2\,\xi\mathbf{p}\,\xi\mathbf{s})}{\mathrm{Zo}\,\eta\,(4\,\mathbf{ks}^2\,(\alpha^2+\eta^2)\,(\xi\mathbf{p}-\xi\mathbf{s})-4\,(\alpha^2+\eta^2)^2\,(\xi\mathbf{p}-\xi\mathbf{s})+\mathbf{ks}^4\,\xi\mathbf{s})}\Big\}\Big\}
\end{aligned}
$$

(74)

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Ycl}[\sigma] = \\
&\Big\{\Big\{\frac{-2\,\mathbf{ks}\,(\alpha^2+\eta^2)\,(\alpha\,(\eta-\xi\mathbf{p})-\eta\,\xi\mathbf{s})+\mathbf{ks}^3\,(2\,\alpha\,(\eta-\xi\mathbf{p})-\eta\,\xi\mathbf{s})}{\mathrm{Zo}\,(4\,\mathbf{ks}^2\,(\alpha^2+\eta^2)\,(\xi\mathbf{p}-\xi\mathbf{s})+\mathbf{ks}^4\,\xi\mathbf{s}+4\,(\alpha^2+\eta^2)^2\,(-\xi\mathbf{p}+\xi\mathbf{s}))},\\
&\quad-\frac{\mathbf{ks}\,\alpha\,(\mathbf{ks}^2-\alpha^2-\eta^2)\,(\mathbf{ks}^2-2\,(\alpha^2+\alpha\,\eta+\eta^2))}{\mathrm{Zo}\,\eta\,(4\,\mathbf{ks}^2\,(\alpha^2+\eta^2)\,(\xi\mathbf{p}-\xi\mathbf{s})-4\,(\alpha^2+\eta^2)^2\,(\xi\mathbf{p}-\xi\mathbf{s})+\mathbf{ks}^4\,\xi\mathbf{s})},\\
&\quad\frac{\mathbf{ks}\,\alpha\,(-2\,(\alpha^2+\eta^2)\,(\eta^2+\alpha\,\xi\mathbf{s})+\mathbf{ks}^2\,(2\,\eta^2+\alpha\,\xi\mathbf{s}))}{\mathrm{Zo}\,\eta\,(4\,\mathbf{ks}^2\,(\alpha^2+\eta^2)\,(\xi\mathbf{p}-\xi\mathbf{s})-4\,(\alpha^2+\eta^2)^2\,(\xi\mathbf{p}-\xi\mathbf{s})+\mathbf{ks}^4\,\xi\mathbf{s})}\Big\},\\
&\Big\{\frac{\mathbf{ks}\,(\mathbf{ks}^2\,\alpha\,(\eta-\xi\mathbf{p})-2\,(\alpha^2+\eta^2)\,(\alpha\,\eta-(\alpha+\eta)\,\xi\mathbf{p}))\,\xi\mathbf{s}}{\mathrm{Zo}\,\alpha\,(4\,\mathbf{ks}^2\,(\alpha^2+\eta^2)\,(\xi\mathbf{p}-\xi\mathbf{s})-4\,(\alpha^2+\eta^2)^2\,(\xi\mathbf{p}-\xi\mathbf{s})+\mathbf{ks}^4\,\xi\mathbf{s})},\\
&\quad\frac{-2\,\mathbf{ks}\,(\alpha^2+\eta^2)\,((\alpha^2+\eta^2)\,\xi\mathbf{p}+\alpha\,\eta\,\xi\mathbf{s})+\mathbf{ks}^3\,(2\,(\alpha^2+\eta^2)\,\xi\mathbf{p}+\alpha\,\eta\,\xi\mathbf{s})}{\mathrm{Zo}\,\eta\,(4\,\mathbf{ks}^2\,(\alpha^2+\eta^2)\,(\xi\mathbf{p}-\xi\mathbf{s})-4\,(\alpha^2+\eta^2)^2\,(\xi\mathbf{p}-\xi\mathbf{s})+\mathbf{ks}^4\,\xi\mathbf{s})},\\
&\quad\frac{\mathbf{ks}\,(\mathbf{ks}^2\,\eta^2-2\,(\alpha^2+\eta^2)\,(\eta^2+\alpha\,\xi\mathbf{p}))\,\xi\mathbf{s}}{\mathrm{Zo}\,\eta\,(4\,\mathbf{ks}^2\,(\alpha^2+\eta^2)\,(\xi\mathbf{p}-\xi\mathbf{s})-4\,(\alpha^2+\eta^2)^2\,(\xi\mathbf{p}-\xi\mathbf{s})+\mathbf{ks}^4\,\xi\mathbf{s})}\Big\},\\
&\Big\{\big(-\mathbf{ks}^5\,\xi\mathbf{p}-2\,\mathbf{ks}\,\big(\alpha^2+\eta^2\big)\,\big(\alpha\,\eta\,\xi\mathbf{p}+2\,\eta^2\,\xi\mathbf{p}+\alpha^2\,(\eta+\xi\mathbf{p})\big)+\mathbf{ks}^3\,\big(2\,\alpha\,\eta\,\xi\mathbf{p}+4\,\eta^2\,\xi\mathbf{p}+\alpha^2\,(\eta+3\,\xi\mathbf{p})\big)+\\
&\qquad 4\,\mathbf{ks}\,\eta\,\big(-\mathbf{kp}^2\,\eta+\eta^3+\alpha^2\,(\eta-\xi\mathbf{p})\big)\,\xi\mathbf{s}\big)\Big/\big(\mathrm{Zo}\,\alpha\,\big(4\,\mathbf{ks}^2\,\big(\alpha^2+\eta^2\big)\,(\xi\mathbf{p}-\xi\mathbf{s})-4\,\big(\alpha^2+\eta^2\big)^2\,(\xi\mathbf{p}-\xi\mathbf{s})+\mathbf{ks}^4\,\xi\mathbf{s}\big)\big),\\
&\quad\frac{\mathbf{ks}\,\eta\,(\mathbf{ks}^2-\alpha^2-2\,\eta^2)\,(\mathbf{ks}^2-2\,(\alpha^2+\eta^2))+2\,\mathbf{ks}\,(\mathbf{ks}^2\,\alpha-\alpha^3-\alpha\,\eta^2+2\,\eta^3)\,\xi\mathbf{p}\,\xi\mathbf{s}}{\mathrm{Zo}\,\eta\,(4\,\mathbf{ks}^2\,(\alpha^2+\eta^2)\,(\xi\mathbf{p}-\xi\mathbf{s})-4\,(\alpha^2+\eta^2)^2\,(\xi\mathbf{p}-\xi\mathbf{s})+\mathbf{ks}^4\,\xi\mathbf{s})},\\
&\quad-\frac{\mathbf{ks}\,\alpha\,(-\mathbf{ks}^2\,(\eta^2-2\,\alpha\,\xi\mathbf{p})-2\,(\alpha^2+\eta^2)\,(-\eta^2+\alpha\,\xi\mathbf{p})+4\,\eta^2\,\xi\mathbf{p}\,\xi\mathbf{s})}{\mathrm{Zo}\,\eta\,(4\,\mathbf{ks}^2\,(\alpha^2+\eta^2)\,(\xi\mathbf{p}-\xi\mathbf{s})-4\,(\alpha^2+\eta^2)^2\,(\xi\mathbf{p}-\xi\mathbf{s})+\mathbf{ks}^4\,\xi\mathbf{s})}\Big\}\Big\}
\end{aligned}
$$

[1] For sake of brevity sometimes we adopt the matrix representations used in MATHEMATICA: M={{row 1},{row 2},……{row n}}.

8. The plane waves in homogeneous isotropic media

At $\mathbf{r} = |z, x, y|^t$, the plane waves are defined by the solution

(75) $\boldsymbol{\psi}_\mathbf{t} = \boldsymbol{\psi}_\mathbf{o} e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$

of the transverse equation (30). In this solution, $\mathbf{k} = |k_y, \alpha_o, \eta_o|^t$ is the propagation vector of the plane wave and $\boldsymbol{\psi}_o$ is a constant vector in the space En . Taking into account that $\frac{\partial}{\partial y} = -jk_y$, eq. (30) becomes:

(76) $-jk_y \boldsymbol{\psi}_\mathbf{o} = -jK \cdot \boldsymbol{\psi}_\mathbf{o}$

This equation coincides with equation (49) that defines the eigenvalues and eigenvectors of K. Thus $\boldsymbol{\psi}_o$ is an eigenvector $\boldsymbol{\psi}^{(i)}(\boldsymbol{\sigma})$ and k_y is the relevant eigenvalue $\xi_i(\boldsymbol{\sigma})$ with i=1,2..,n. We note that given $\alpha_o, \eta_o \rightarrow \boldsymbol{\sigma}_o$ there are four propagation constant k_y and four polarization $\boldsymbol{\psi}_o$ for an electromagnetic medium, six propagation constant k_y and six polarization $\boldsymbol{\psi}_o$ for elastic medium. These quantities are related to the eigenvalues and eigenvectors of $K(\eta_o)$:

(77) $k_{yi} = \xi_i(\alpha_o, \eta_o)$, $\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{o}i} = \boldsymbol{\psi}^{(i)}(\alpha_o, \eta_o)$ (i=1,2,3…,n)

We call progressive the plane waves where i=1,2,. ..n/2 and regressive the plane waves where i=,1+n/2, 2+n/2,..,n

Given α_o, η_o, using the eigenvalues of K, we get n/2 $k_y = k_y(\alpha_o, \eta_o)$ and successively $\mathbf{k} = |k_y, \alpha_o, \eta_o|^t$ and $k = |\mathbf{k}| = \sqrt{\alpha_o^2 + \eta_o^2 + k_y^2}$,

We now recall that $\boldsymbol{\psi}_o$ contain only the continuous transverse components of the field. The other components are related to the transverse components by the equations (8) and (20) by setting $\frac{\partial}{\partial z} = -j\alpha_o$ $\frac{\partial}{\partial x} = -j\eta_o$

9. Diffraction by a half-infinite crack in a homogeneous elastic solid planar problem

Using circuit representations, in electromagnetism the diffraction by an impedance halfplane immersed in an arbitrary bianisotropic medium has been solved in [14]. In this section we will solve the problem of a semi-infinite crack located in an arbitrary homogeneous elastic solid (Fig. 8) using the same circuit procedure of [14].

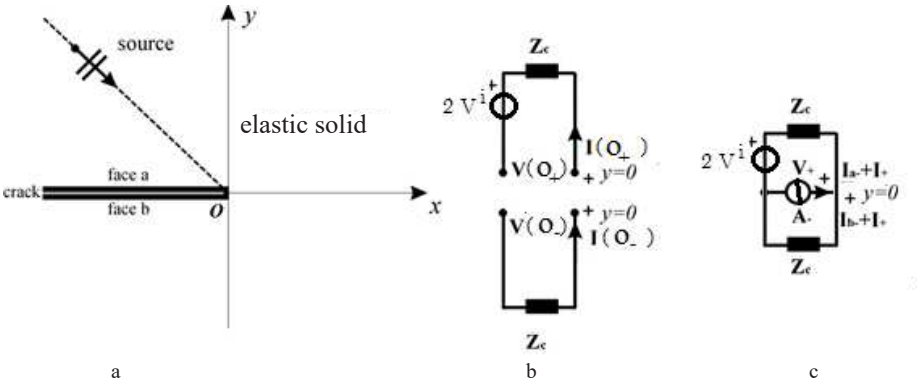


Fig. 8. a) half-infinite crack in an homogeneous elastic solid illuminated by a plane wave; b) equivalent network model; c) the circuit simplification.

Since the geometry is invariant in the z direction, without loss of generality we assume sources that vary as $\exp(-j\alpha_o z)$. This produces fields having the same variations $\exp(-j\alpha_o z)$ which we omit.

We will solve this problem by applying the Wiener-Hopf (W-H) technique. The formulation we use is valid for arbitrary sources located in the region y>0. The plane wave incident will be considered as a limit case.

Putting:

$$\mathbf{I}_{a-} = \int_{-\infty}^{0} \begin{vmatrix} v_x(\alpha_o, 0_+, x) \\ v_y(\alpha_o, 0_+, x) \\ v_z(\alpha_o, 0_+, x) \end{vmatrix} e^{j\eta x} dx,\ \mathbf{V}_{a-} = \int_{-\infty}^{0} \begin{vmatrix} T_2(\alpha_o, 0_+, x) \\ T_4(\alpha_o, 0_+, x) \\ T_6(\alpha_o, 0_+, x) \end{vmatrix} e^{j\eta x} dx \tag{78}$$

$$(79)\quad \mathbf{I}_{b-}=\int_{-\infty}^{0}\begin{vmatrix} v_x(\alpha_o,0_-,x)\\ v_y(\alpha_o,0_-,x)\\ v_z(\alpha_o,0_-,x)\end{vmatrix}e^{j\eta x}dx,\ \mathbf{V}_{b-}=\int_{-\infty}^{0}\begin{vmatrix} T_2(\alpha_o,0_-,x)\\ T_4(\alpha_o,0_-,x)\\ T_6(\alpha_o,0_-,x)\end{vmatrix}e^{j\eta x}dx$$

$$(80)\quad \mathbf{I}_{+}=\int_{0}^{\infty}\begin{vmatrix} v_x(\alpha_o,0\ ,x)\\ v_y(\alpha_o,0\ ,x)\\ v_z(\alpha_o,0\ ,x)\end{vmatrix}e^{j\eta x}dx,\ \mathbf{V}_{+}=\int_{0}^{\infty}\begin{vmatrix} T_2(\alpha_o,0,x)\\ T_4(\alpha_o,0,x)\\ T_6(\alpha_o,0,x)\end{vmatrix}e^{j\eta x}dx\ ,$$

where (78) reports the velocity and stress spectra on the face a of the crack ($y=0_+$, $x<0$), (79) reports the velocity and stress spectra on the face b of the crack ($y=0_-$, $x<0$) and (80) reports the continuous velocity and stress spectra on the aperture ($y=0$, $x>0$).

The Fourier transforms define the following spectra:

$$(81)\qquad \mathbf{I}(0_+)=\mathbf{I}_{a-}+\mathbf{I}_{+},\qquad \mathbf{I}(0_-)=\mathbf{I}_{b-}+\mathbf{I}_{+},\ \mathbf{V}(0_+)=\mathbf{V}_{a-}+\mathbf{V}_{+}=\mathbf{V}_{+},$$
$$\mathbf{V}(0_-)=\mathbf{V}_{b-}+\mathbf{V}_{+}=\mathbf{V}_{+}$$

The second members of the last two equations (81) hold because taking into account the boundary conditions of the crack, equivalent to a PEC half-plane, we have that:

$$\mathbf{V}_{a-}=0,\ \mathbf{V}_{b-}=0$$

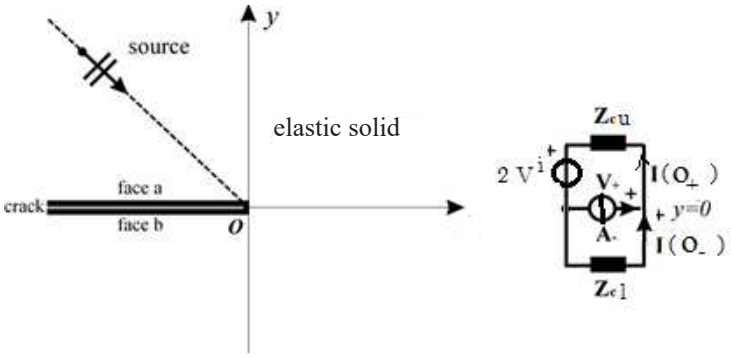


Fig. 9. Equivalent network.

By using the circuit equivalent of Fig. 9 we have:

(82) $\mathbf{I}(0_+) = \mathbf{Y}_{cu}(\mathbf{V}_+ - 2\mathbf{V}^i)$, $\mathbf{I}(0_-) = -\mathbf{Y}_{cl}\mathbf{V}_+$

It follows:

(83)

$$\mathbf{A}_- = \mathbf{I}(0_+) - \mathbf{I}(0_-) = \mathbf{Y}_{cu}(\mathbf{V}_+ - 2\mathbf{V}^i) + \mathbf{Y}_{cl}\mathbf{V}_+^{\,i}) = \mathbf{Y}\mathbf{V}_+ + \mathbf{Y}_{cu}(-2\mathbf{V}^i) = \mathbf{Y}\mathbf{V}_+ + \mathbf{I}^p$$

where

(84) $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_{cu} + \mathbf{Y}_{cl}$, $\mathbf{I}^p = -\mathbf{Y}_{cu}2\mathbf{V}^i$

with $\mathbf{Y}_{cu} = \mathbf{Y}_{cu}(\alpha_o, \eta)$ and $\mathbf{Y}_{cl} = \mathbf{Y}_{cl}(\alpha_o, \eta)$ defined by (73) and (74).

We observe that $-\mathbf{Y}_{cu}2\mathbf{V}^i = \mathbf{I}^p = \mathbf{I}_-^p + \mathbf{I}_+^p$ is the primary field, i.e. the FT of the velocity by supposing that the plane y=0 is a rigid plane (equivalent to the PMC plane in electromagnetism)

We rewrite (83) in the form:

(85) $\mathbf{A}_-^d = \mathbf{Y}\mathbf{V}_+ + \mathbf{I}_+^p$

where $\mathbf{A}_-^d = \mathbf{A}_- - \mathbf{I}_-^p$

Looking at (85), the problem is reduced to the factorization of the matrix $\mathbf{Y}^{-1}(\alpha_o, \eta) = \mathbf{Y}_+^{-1}(\alpha_o, \eta)\mathbf{Y}_-^{-1}(\alpha_o, \eta)$ in the η plane. The factorization of the matrix $\mathbf{Y}$ can be accomplished in closed form when the crack is located in a homogeneous isotropic solid medium (see section 8.1). In the most general case we can resort to a very approximate powerful method that provides accurate factorized matrices: the Fredholm factorization [(3), chapter 5].

Once we have obtained the factorization, by multiplying (85) by $\mathbf{Y}_+$ we get:

(86) $\mathbf{Y}_+\mathbf{V}_+ = \mathbf{Y}_-^{-1}\mathbf{A}_-^d + \mathbf{Y}_-^{-1}\mathbf{I}_+^p$

By decomposing

(87) $\mathbf{Y}_-^{-1}\mathbf{I}_+^p = \mathbf{S}_- + \mathbf{S}_+$

we get:

(88) $\mathbf{Y}_+\mathbf{V}_+ - \mathbf{S}_+ = \mathbf{Y}_-^{-1}\mathbf{A}_-^d + \mathbf{S}_- = 0$.

It yields the solution:

(89) $\mathbf{A}_-^d = -\mathbf{Y}_- S_-$

(90) $\mathbf{V}_+ = \mathbf{Y}_+^{-1}\mathbf{S}_+$.

The above solution are valid for arbitrary sources. In the limit case of plane wave source we assume small loss in the medium in order to avoid singularities in the real axis $\mathrm{Im}[\eta] = 0$. Furthermore, for the moment, we assume that the plane wave does not produce poles in the regularity regions of the plus functions $\mathrm{Im}[\eta] \geq 0$

To evaluate $\mathbf{S}_+$ we assume an incident regressive plane wave illumination defined by

(91) $\boldsymbol{\psi}_c^i = \begin{vmatrix} \mathbf{V}_{oi}^{inc} \\ \mathbf{I}_{oi}^{inc} \end{vmatrix} e^{-j\eta_o x - jk_{yi} y - j\alpha_o z} = \boldsymbol{\psi}_{oi} e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ ($\mathrm{Im}[\eta_o] < 0$

where $\boldsymbol{\psi}_{oi}$ is a constant vector of order 6 and $\mathbf{k}_i = k_i \hat{\mathbf{k}}_i = \eta_o \hat{x} + k_{yi} \hat{y} + \alpha_o \hat{z}$ (section 6). The vector $\boldsymbol{\psi}_{oi}$ contain only the transverse component $\mathbf{V}_{oi}^{inc} = \left| T_{o2i}^{inc}, T_{o4i}^{inc}, T_{o6i}^{inc} \right|, \mathbf{I}_{oi}^{inc} = \left| v_{o1i}^{inc}, v_{o2i}^{inc}, v_{o3i}^{inc} \right|$, of the elastic field evaluated in x=0,y=0, z=0. Recall that $\boldsymbol{\psi}_{oi}(\alpha_o, \eta_o)$ and $k_{yi}(\alpha_o, \eta_o)$ are respectively the eigenvector i and the corresponding eigenvalue of the matrix $\mathbf{K}(\alpha_o, \eta_o)$ in the elastic medium where the crack is present. In the case of regressive plane wave i can assume one of the three values 4,5,6. Taking into account that

(92) $\mathbf{I}_+^p(\eta) e^{-j\alpha_o z} = 2\int_0^\infty \mathbf{I}_{oi}^{inc} e^{-j\eta_o x - j\alpha_o z} e^{j\eta x} dx = 2\frac{j}{\eta - \eta_o} \mathbf{I}_{oi}^{inc} e^{-j\alpha_o z}$

we get:

(93) $\mathbf{Y}_-^{-1}\mathbf{I}_+^p = \mathbf{S}_- + \mathbf{S}_+$

(94) $\mathbf{S}_+ = 2\mathbf{Y}_-^{-1}(\eta_o)\frac{j}{\eta - \eta_o}\mathbf{I}_{oi}^{inc}$

This yields the solution:

(95) $\mathbf{V}_+(\eta) = 2\mathbf{Y}_+^{-1}(\eta)\mathbf{Y}_-^{-1}(\eta_o)\frac{j}{\eta - \eta_o}\mathbf{I}_{oi}^{inc}$.

By using the circuit equivalent of Fig. 9 we have

(96) $\mathbf{I}^d(0_+, \eta) = \mathbf{Y}_{cu}(\eta)\mathbf{V}_+(\eta) = 2\mathbf{Y}_{cu}(\eta)\mathbf{Y}_+^{-1}(\eta)\mathbf{Y}_-^{-1}(\eta_o)\frac{j}{\eta - \eta_o}\mathbf{I}_{oi}^{inc}$,

(97) $\mathbf{I}(0_-,\eta) = -\mathbf{Y}_{cl}(\eta)\mathbf{V}_+(\eta) = -2\mathbf{Y}_{cl}(\eta)\mathbf{Y}_+^{-1}(\eta)\mathbf{Y}_-^{-1}(\eta_o)\dfrac{j}{\eta-\eta_o}\mathbf{I}_{oi}^{inc}$.

Taking into account (60) and (61) we get

(98)
$$\mathbf{I}^d(y,\eta) = C_{o1}e^{-j\xi_1 y}\mathbf{I}^{(1)}(\eta) + C_{o2}e^{-j\xi_2 y}\mathbf{I}^{(2)}(\eta) + C_{o3}e^{-j\xi_3 y}\mathbf{I}^{(3)}(\eta),$$
$y > 0$

(99)
$$\mathbf{I}(y,\eta) = C_{o4}e^{-j\xi_4 y}\mathbf{I}^{(4)}(\eta) + C_{o5}e^{-j\xi_5 y}\mathbf{I}^{(5)}(\eta) + C_{o6}e^{-j\xi_6 y}\mathbf{I}^{(6)}(\eta),$$
$y < 0$.

Where the eigenvalues $\xi_i = \xi_i(\eta)$ and $\mathbf{I}^{(i)}(\eta)$ (i=1,..6) are relevant to the currents of the eigenvectors of $\mathbf{K}(\alpha_o,\eta)$ (see eq. 62).

The quantities $C_{oi} = C_{oi}(\eta)$ (i=1,…6) can obtained by imposing:

(100) $\mathbf{I}^d(0_+,\eta) = C_{o1}\mathbf{I}^{(1)}(\eta) + C_{o2}\mathbf{I}^{(2)}(\eta) + C_{o3}\mathbf{I}^{(3)}(\eta)$, $y > 0$

(101) $\mathbf{I}(0_-,\eta) = C_{o4}\mathbf{I}^{(4)}(\eta) + C_{o5}\mathbf{I}^{(5)}(\eta) + C_{o6}\mathbf{I}^{(6)}(\eta)$, $y < 0$

The Inverse Fourier transform provide the scattered field of the velocities:

(102)
$$\begin{vmatrix} v_x^d(\alpha_o, y, x) \\ v_y^d(\alpha_o, y_-, x) \\ v_z^d(\alpha_o, y_-, x) \end{vmatrix} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{I}^d(y,\eta)e^{-j\eta x}d\eta \qquad y > 0$$

$$\begin{vmatrix} v_x(\alpha_o, y, x) \\ v_y(\alpha_o, y_-, x) \\ v_z(\alpha_o, y_-, x) \end{vmatrix} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{I}\ (y,\eta)e^{-j\eta x}d\eta \qquad y < 0\,.$$

The above theory was developed by considering $\mathrm{Im}[\eta_o] < 0$. An analytical continuation allows to use the obtained equations also when $\mathrm{Im}[\eta_o] > 0$. Using the inverse Fourier transform, the only difference is the presence of the Bromwich contour (horizontal line with $\mathrm{Im}[\eta] > \mathrm{Im}[\eta_o]$) instead of the real axis.

Far field evaluations of the integrals present in (102) can be obtained by using the saddle point method [3].

9.1. Factorization of $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_{cu} + \mathbf{Y}_{cl}$

In this section we will see that the matrix: $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_{cu} + \mathbf{Y}_{cl}$ present in the WH equations in the isotropic media is always amenable to close form factorization.

9.1.1. The 2-D case

First we consider the two-dimensional $\alpha_o = 0$ diffraction problem of a half-infinite crack located in

an isotropic, homogenous, elastic solid. This problem can be decoupled into planar (P and SV waves) and anti-planar (SH waves) problem. The antiplanar case introduces scalar factorization and it is not considered here. Conversely in the planar case the matrix $\mathbf{Y}(\eta) = \mathbf{Y}_{cu}(\eta) + \mathbf{Y}_{cl}(\eta)$ is of order two. Applying the general equations that provide the characteristic impedances of a homogeneous medium (73) and (74) in the 2D ($\alpha_o = 0$) case we have:

(103)

$$\mathbf{Y}_{cu}(\eta) = \begin{pmatrix} \frac{ks\,\eta\left(ks^2 - 2\,\eta^2 - 2\,\xi p\,\xi s\right)}{So\,R[\eta]} & -\frac{ks^3\,\xi s}{So\,R[\eta]} \\ -\frac{ks^3\,\xi p}{So\,R[\eta]} & -\frac{ks\,\eta\left(ks^2 - 2\,\eta^2 - 2\,\xi p\,\xi s\right)}{So\,R[\eta]} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_{cl}(\eta) = \begin{pmatrix} -\frac{ks\,\eta\left(ks^2 - 2\,\eta^2 - 2\,\xi p\,\xi s\right)}{So\,R[\eta]} & -\frac{ks^3\,\xi s}{So\,R[\eta]} \\ -\frac{ks^3\,\xi p}{So\,R[\eta]} & \frac{ks\,\eta\left(ks^2 - 2\,\eta^2 - 2\,\xi p\,\xi s\right)}{So\,R[\eta]} \end{pmatrix}$$

where $R(\eta)$ is the Rayleigh function defined by

(104) $$R(\eta) = (2\eta^2 - k_{SV}^2)^2 - 4\eta^2\sqrt{\eta^2 - k_{SV}^2}\sqrt{\eta^2 - k_P^2}$$

Taking into account that the elements in diagonal are equal and opposite in sign, the matrix to factorize is antidiagonal:

$$\mathbf{Y} = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{2K_s^3\,\xi_p}{Z_o R(\eta)} \\ -\frac{2K_s^3\,\xi_p}{Z_o R(\eta)} & 0 \end{vmatrix}$$

This factorization of this matrix easily reduces to the factorizations of the two scalar

$$\frac{\sqrt{k_s^2-\eta^2}}{R(\eta)} \text{ and } \frac{\sqrt{k_p^2-\eta^2}}{R(\eta)}$$

An accurate factorization of the Rayleigh function is presented in Achenbach [15]

9.1.2. The 3D-dimensional case

In the case of 3D diffraction by half-infinite crack ($\alpha_o \neq 0$) the three waves P, SV and SH couple.

Taking into account the expressions of the characteristic admittance (73) and (74) , the matrix $Y_t = Y_{cu} + Y_{cl}$ to factorize is:

(106)

$$Yt = \begin{pmatrix} -\frac{4\,ks\,\omega_0\,\eta\,\xi_s}{\beta_0\left(\left(ks^2-2\left(\omega_0^2+\eta^2\right)\right)^2+4\left(\omega_0^2+\eta^2\right)\xi_p\,\xi_s\right)} & \frac{2\,ks\,\omega_0\left(ks^2-2\left(\omega_0^2+\eta^2\right)\right)\xi_s}{\beta_0\,\eta\left(\left(ks^2-2\left(\omega_0^2+\eta^2\right)\right)^2+4\left(\omega_0^2+\eta^2\right)\xi_p\,\xi_s\right)} & -\frac{4\,ks\,\omega_0\,\eta\,\xi_s}{\beta_0\left(\left(ks^2-2\left(\omega_0^2+\eta^2\right)\right)^2+4\left(\omega_0^2+\eta^2\right)\xi_p\,\xi_s\right)} \\ \frac{2\,ks\left(ks^2\,\omega_0-2\left(\omega_0+\eta\right)\left(\omega_0^2+\eta^2\right)\right)\xi_p}{\beta_0\,\omega_0\left(\left(ks^2-2\left(\omega_0^2+\eta^2\right)\right)^2+4\left(\omega_0^2+\eta^2\right)\xi_p\,\xi_s\right)} & 0 & \frac{4\,ks\,\omega_0\left(\omega_0^2+\eta^2\right)\xi_p}{\beta_0\,\eta\left(\left(ks^2-2\left(\omega_0^2+\eta^2\right)\right)^2+4\left(\omega_0^2+\eta^2\right)\xi_p\,\xi_s\right)} \\ -\frac{2\,ks\,\omega_0\,\eta\left(ks^2-2\left(\omega_0^2+\eta^2+2\,\xi_p\,\xi_s\right)\right)}{\beta_0\,\xi_s\left(\left(ks^2-2\left(\omega_0^2+\eta^2\right)\right)^2+4\left(\omega_0^2+\eta^2\right)\xi_p\,\xi_s\right)} & -\frac{2\left(ks\,\eta\left(ks^2-\omega_0^2-2\,\eta^2\right)\left(ks^2-2\left(\omega_0^2+\eta^2\right)\right)+2\,ks\left(ks^2\,\omega_0-\omega_0^3-\omega_0\,\eta^2+2\,\eta^3\right)\xi_p\,\xi_s\right)}{\beta_0\,\eta\,\xi_s\left(\left(ks^2-2\left(\omega_0^2+\eta^2\right)\right)^2+4\left(\omega_0^2+\eta^2\right)\xi_p\,\xi_s\right)} & -\frac{2\,ks\,\omega_0\,\eta\left(ks^2-2\left(\omega_0^2+\eta^2+2\,\xi_p\,\xi_s\right)\right)}{\beta_0\,\xi_s\left(\left(ks^2-2\left(\omega_0^2+\eta^2\right)\right)^2+4\left(\omega_0^2+\eta^2\right)\xi_p\,\xi_s\right)} \end{pmatrix}$$

We observe that the denominator of all the elements of this matrix is the Rayleigh function $R(\eta)$ defined in (104) where η^2 is substituted by $\eta^2+\alpha_o^2$. The exact factorization of $\mathbf{Y}_t$ can be obtained in closed form also in the 3D case. In fact the first two rows of $\mathbf{Y}_t$ produce two decoupled scalar WH equations having as unknown two plus functions $X_{1+}(\eta)$ and $X_{2+}(\eta)$ that are linear combinations of the plus unknowns present in $\mathbf{V}_+ = \left|T_{2+} \quad T_{4+} \quad T_{6+}\right|^t = \left|T_{yy+} \quad T_{yz+} \quad T_{yx+}\right|^t$. The scalar factorizations that will evaluate $X_{1+}(\eta)$ and $X_{2+}(\eta)$ involve the factorization of the scalars $\xi_s = \sqrt{k_s^2-\alpha_o^2-\eta^2}$, $\xi_p = \sqrt{k_p^2-\alpha_o^2-\eta^2}$ and the Rayleigh function. Obtained in closed form $X_{1+}(\eta)$ and $X_{2+}(\eta)$ we can express T_{2+} and T_{6+} in terms of T_{4+}. Substituting in the scalar WH equations arising from the third row of $\mathbf{Y}_t$ we get a scalar WH equation that allows to evaluate T_{4+} in closed form.

10. On the solution of new problems

The elastic structures for which circuit formulation are presented here are well known In particular very noticeable and excellent works have been done by Achenbach and Gautesen [4,16,17] to get the solution of the crack problem in indefinite homogeneous elastic medium. However these authors resorted to a classical cumbersome procedure and not to the general systematic methodology reported here and used by Daniele and Zich in [3] for solving analogous electromagnetic problems. We claim that a derivation based on circuit approach for elastic problem permits to obtain a new formulation of these difficult problems in a conceptually simple and direct fashion. To confirm the power of the circuit approach we will consider problems involving also guided waves in the layered media. In particular let's consider the electromagnetic problem indicated in Fig. 10.

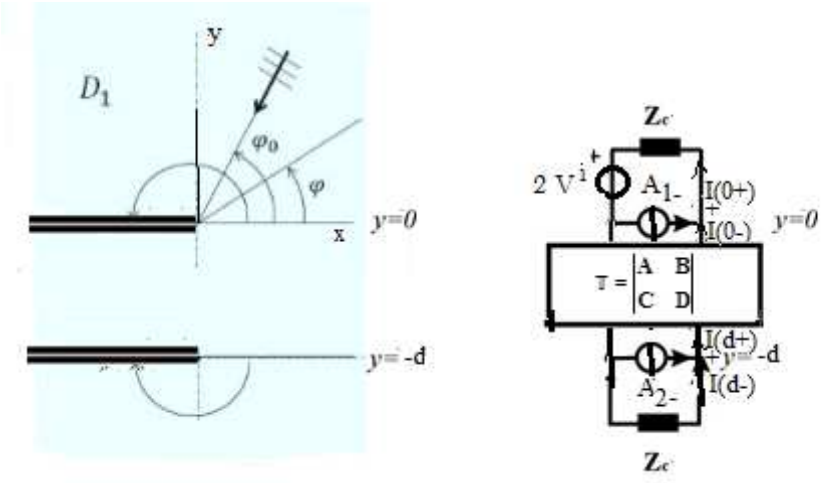


Fig. 10. Scattering by a truncated electromagnetic planar waveguide.

In this problem an E-polarized plane $E_z^{inc} = \exp(jk\rho\cos(\varphi - \varphi_o))$ wave is normally ($\alpha_o = 0$) incident on a truncated planar waveguide bounded by the PEC half-planes y=0 and y=-d. The voltages on the two planes y=0 and y=-d are plus functions respectively given by:

$$
\begin{aligned}
&V_1(\eta, y=0) = V_1(\eta) = V_{1-}(\eta) + V_{1+}(\eta) = V_{1+}(\eta), \\
&V_2(\eta, y=-d) = V_2(\eta) = V_{2-}(\eta) + V_{2+}(\eta) = V_{2+}(\eta),
\end{aligned}
\tag{107}
$$

The slab between the planes y=0 and y=-d is represented by a two port whose transmission matrix has the parameters :

(108) $A = D = \cos(\xi d)$, $\mathrm{B}=\mathrm{jZ}_c \sin(\xi d), C=\mathrm{jY}_c \sin(\xi d)$

being $\xi = \xi(\eta) = \sqrt{k^2 - \eta^2}$, and where $\mathrm{Y}_c = \mathrm{Y}_c(\eta) = \dfrac{1}{Z_c(\eta)} = \dfrac{\xi(\eta)}{\omega\mu_o}$ is the characteristic admittance.

The circuit modelling of the problem reported in fig.10 immediately provide the following six equations:

(109) $\begin{aligned} V_{1+} &= AV_{2+} + BI(-d+), \\ I(0-) &= CV_{2+} + DI(-d+), \end{aligned}$ two port equations of the slab – d<y<0

(110) $2V^i + Z_c I(0+) = V_{1+}$ one-port equation of the medium y>0

(111) $-Z_c I(d-) = V_{2-}$ one-port equation of the medium y<0

(112) $I(0-) + A_{1-} = I(0+)$ node equation on the port 1 of the two port

(113) $I(-d-) + A_{2-} = I(-d+)$ node equation on the port 2 of the two port

By eliminating from the above equations, the four not WH unknowns $I(0-), I(-d+), I(0+), I(-d-)$ we get a system of two WH equations

(114) $G \begin{vmatrix} V_{1+} \\ V_{2+} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A^s_{1-} \\ A_{2-} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A^p_{1-} \\ 0 \end{vmatrix}$

where:

$$G = G(\eta) = Y_c(\eta) \begin{vmatrix} \dfrac{2}{1 - e^{2j\xi(\eta)d}} & j\csc(\xi(\eta)d) \\ j\csc(\xi(\eta)d) & \dfrac{2}{1 - e^{2j\xi(\eta)d}} \end{vmatrix},$$

$$A^p_{1+} = A^p_{1+}(\eta) = \frac{2j\sin\varphi_o}{Z_o(\eta - \eta_o)}, \eta_o = -k\cos\varphi_o$$

The exact factorization of the matrix kernel $G(\eta) = G_-(\eta)G_+(\eta)$ has been accomplished in [3] and it leads to the explicit exact solution (eq.(12) of 8.1.2 [3]).

(115)

$$\begin{vmatrix} V_{1+} \\ V_{2+} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{m_{1-}(\eta_o)m_{1+}(\eta\ )} + \dfrac{1}{m_{2-}(\eta_o)m_{2+}(\eta\ )} \\ \dfrac{1}{m_{1-}(\eta_o)m_{1+}(\eta\ )} - \dfrac{1}{m_{2-}(\eta_o)m_{2+}(\eta\ )} \end{vmatrix} \frac{jE_o \sin\varphi_o}{Z_o(\eta-\eta_o)}$$

$$\begin{vmatrix} A_{1-} \\ A_{2-} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{m_{1-}(\eta\ )}{m_{1-}(\eta_o)} + \dfrac{m_{2-}(\eta\ )}{m_{2-}(\eta_o)} \\ \dfrac{m_{1-}(\eta\ )}{m_{1-}(\eta_o)} - \dfrac{m_{2-}(\eta\ )}{m_{2-}(\eta_o)} \end{vmatrix} \frac{jE_o \sin\varphi_o}{Z_o(\eta-\eta_o)}$$

being a=d/2 and $\gamma = 0.57721\ldots$ the Euler constant:

$$m_{1+}(\eta) = \frac{1}{\omega\mu_o} m_{c+}(\eta)\,, \quad m_{1-}(\eta) = m_{c-}(\eta)$$

$$m_{c+}(\alpha) = \frac{\sqrt{k-\eta}\,\Gamma\left(-\dfrac{\eta}{A}+\dfrac{B}{A}+1\right)\exp[\dfrac{\xi a}{\pi}\log\dfrac{j\tau-\eta}{k}-q\eta]}{\sqrt{\cos(ka)}\,e^{\gamma\frac{\eta}{A}}\Gamma\left(\dfrac{B}{A}+1\right)} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1-\dfrac{\eta}{A\,n+B}\right)}{\left(1-\dfrac{\eta}{\alpha_n}\right)}$$

$$m_{c-}(\eta) = m_{c+}(-\eta)$$

$$\alpha_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{(n-1/2)\pi}{a}\right)^2}\,, \quad A = -j\frac{\pi}{a}, \quad B = -\frac{1}{2}A, \quad n = 1,2,\ldots$$

$$q = j\frac{a}{\pi}\left[\log\left(-\frac{j2\pi}{ka}\right)+1-\gamma\right]$$

$$m_{2+}(\eta) = -j\frac{1}{\omega\mu a} m_{s+}(\eta), \qquad m_{2-}(\eta) = m_{s-}(\eta)$$

$$m_{s+}(\eta)=\sqrt{\frac{ka}{\sin(ka)}}\frac{e^{\frac{\xi\, a}{\pi}\log\frac{j\xi-\eta}{k}}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-\frac{\eta a}{-j\pi n}}{1-\frac{\eta}{\eta_{an}}}}{e^{\gamma\frac{\eta a}{-j\pi}}\Gamma(1)\,e^{q\,\eta}}\Gamma(1-\frac{\eta a}{-j\pi}) \quad ,$$

$$m_{s-}(\eta)=m_{s+}(-\eta)$$

$$\eta_{an}=\sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} \qquad n=1,2....,\quad \mathrm{Im}[\eta_{an}]<0$$

$$q=j\frac{a}{\pi}\left[\log\left(-\frac{j2\pi}{ka}\right)+1-\gamma\right]$$

The method to formulate the WH equations for the analog elastic problem is identical to that of fig.10 However now we are faced with a kernel matrix that is not amenable of exact factorization. We claim that the Fredholm factorization (Appendix) will produce accurate and efficient solution of the WH equation as an exact factorization. In order to prove this claim, in the following we compare the two solutions of the electromagnetic problem indicated in Fig.10 with the two different procedure . In particular we evaluated the diffraction coefficient $D(\varphi,\varphi_o)$ in the half-space y>0 (Fig. 11) and the excitation mode coefficients $c[-\eta_i]$ in the planar waveguide (Table 3). These quantities are defined by

(116) $D(\varphi,\varphi_o)=-jkV_{1+}(k\cos\varphi)\sin\varphi$

(117) $c[-\eta_i]=-j(\frac{i\,\pi}{k\,d})^2\frac{k^2}{k\,d\;\eta_i}[V_{1+}(-\eta_i)+(-1)^{i-1}V_{2+}(-\eta_i)]$

They provides the far diffracted field :

(118) $E_z^{diff}(\rho,\varphi)=\sqrt{\frac{1}{2\pi k\rho}}e^{-j(k\rho+\pi/4)}D(\varphi,\varphi_o)$ (y>0)

and the modal representation in the truncated waveguide (-d<x<0,y<0) :

$$(119)\ E_z(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty} c[-\eta_i]\sin\left(\frac{i\pi}{d}y\right)e^{j\eta_i y},\quad \eta_i=\sqrt{k^2-\left(\frac{i\pi}{d}\right)^2}$$

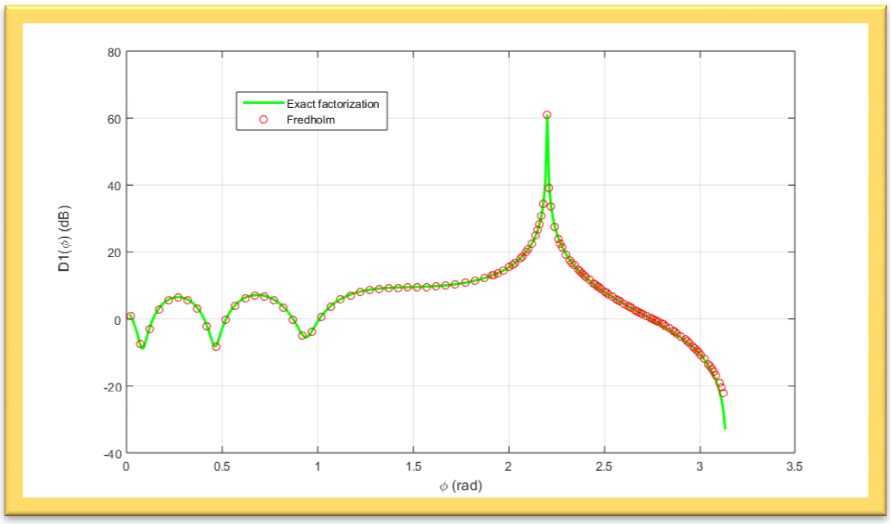


Fig. 11. Comparison of the Coefficient diffraction in the half-space y>0 evaluated by the exact solution and the Fredholm factorization ($kd=5.5\pi$, $\varphi_o=0.3\pi$).

Mode	Propagation	Exact Factorization	Fredholm Factorization
H1	Yes	-0.00478 +j0.00 435	-0.00478 +j0.00 435
H2	Yes	-0.0173- j 0.0227	-0.0173- j 0.0227
H3	Yes	-0.0839 +j 0.0755	-0.0842 +j 0.0755
H4	Yes	-0.3620- j 0.4417	-0.3617- j 0.4421
H5	Yes	+0.8693 -j 0.6889	+0.8710 -j 0.6783
H6	No	-0.1788 + j0.3639	-0.1696 + j0.3663

Table 3. Comparison of the Coefficient excitation of the planar waveguide evaluated by the exact solution and the Fredholm factorization ($kd=5.5\pi$, $\varphi_o=0.3\pi$).

In order to present the Wiener Hopf matrix in the case of the analog elastic problem, let us consider the geometry shown in Fig. 12.

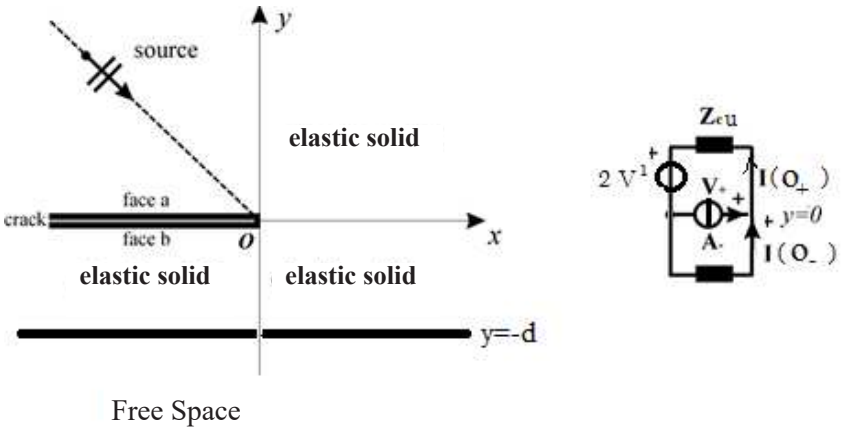


Fig. 12 a. Half-infinite crack in an elastic solid planar problem illuminated by a plane waves and bounded by a free space for y<-d, b: equivalent circuit model, c: the circuit simplification.

Without loss of generality, we will suppose the 2D problem where $\alpha_o = 0$. With respect to the half-plane crash problem the solid elastic problem is bounded by the free-space located in y<-d. The boundary conditions on the plane y=-d are $\left|T_{yy}, T_{yx}\right| = 0$. In the equivalent circuit it means that the voltage is vanishing at y=-d. The WH formulation is identical to the previous cases of semi-infinite crash in an indefinite elastic medium. The only difference is the substitution of the lower characteristic impedance $\mathbf{Y}_{cl}$ with the impedance $\mathbf{Y}_l$. To get $\mathbf{Y}_l$ we consider the equations of the two port circuit representing the slab –d<y<0:

$$(120)\quad \begin{vmatrix} \mathbf{V}(0_) \\ \mathbf{I}(0_) \end{vmatrix} = \exp[jKd] \begin{vmatrix} \mathbf{V}(-d_) \\ \mathbf{I}(-d_) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{V}(-d_) \\ -\mathbf{I}(-d_) \end{vmatrix}$$

Taking into account that $V(-d_) = 0$ we get:

$$(121)\quad \mathbf{I}(0_) = -D \cdot B^{-1} \mathbf{V}(0_).$$

Whence

(122) $Y_l = D \cdot B^{-1}$

The solution of this problem requires the factorization of the 2x2 matrix Y_t:

(123) $\mathbf{Y}_t(\eta) = \mathbf{Y}_{cu}(\eta) + \mathbf{Y}_l(\eta)$

```
Yt =
 {{-(ks η (ks^2 - 2 (η^2 + ξp ξs)))/(Zo ((ks^2 - 2 η^2)^2 + 4 η^2 ξp ξs)) +
    (ks η (-(ks^2 - 2 η^2)^3 Sin[d ξp[η]] Sin[d ξs[η]] +
       2 ξp[η] ξs[η] ((-ks^4 + 6 ks^2 η^2 - 8 η^4) (-1 + Cos[d ξp[η]] Cos[d ξs[η]]) + 4 η^2 Sin[d ξp[η]] Sin[d ξs[η]] ξp[η] ξs[η])))/
     (Zo ((ks^2 - 2 η^2)^4 Sin[d ξp[η]] Sin[d ξs[η]] +
       8 η^2 ξp[η] ξs[η] (-(ks^2 - 2 η^2)^2 (-1 + Cos[d ξp[η]] Cos[d ξs[η]]) + 2 η^2 Sin[d ξp[η]] Sin[d ξs[η]] ξp[η] ξs[η]))),
   -(ks^3 ξs)/(Zo ((ks^2 - 2 η^2)^2 + 4 η^2 ξp ξs)) + (i ks^3 ξs[η] ((ks^2 - 2 η^2)^2 Cos[d ξs[η]] Sin[d ξp[η]] + 4 η^2 Cos[d ξp[η]] Sin[d ξs[η]] ξp[η] ξs[η]))/
     (Zo ((ks^2 - 2 η^2)^4 Sin[d ξp[η]] Sin[d ξs[η]] +
       8 η^2 ξp[η] ξs[η] (-(ks^2 - 2 η^2)^2 (-1 + Cos[d ξp[η]] Cos[d ξs[η]]) + 2 η^2 Sin[d ξp[η]] Sin[d ξs[η]] ξp[η] ξs[η])))},
  {-(ks^3 ξp)/(Zo ((ks^2 - 2 η^2)^2 + 4 η^2 ξp ξs)) +
    (i ks ((ks^3 - 2 ks η^2)^2 Cos[d ξp[η]] Sin[d ξs[η]] ξp[η] + 2 η^2 (ks^2 - 2 η^2) Sin[2 d ξp[η]] (-kp^2 + η^2 + ξp[η]^2) ξs[η] +
       4 η^2 Cos[d ξs[η]] Sin[d ξp[η]] ((kp - η) (kp + η) (ks^2 - 2 η^2) + 2 η^2 ξp[η]^2) ξs[η]))/
     (Zo ((ks^2 - 2 η^2)^4 Sin[d ξp[η]] Sin[d ξs[η]] +
       8 η^2 ξp[η] ξs[η] (-(ks^2 - 2 η^2)^2 (-1 + Cos[d ξp[η]] Cos[d ξs[η]]) + 2 η^2 Sin[d ξp[η]] Sin[d ξs[η]] ξp[η] ξs[η]))),
   (ks η (ks^2 - 2 (η^2 + ξp ξs)))/(Zo ((ks^2 - 2 η^2)^2 + 4 η^2 ξp ξs)) +
    (ks η ((ks^2 - 2 η^2) (-2 Cos[d ξp[η]] + 2 Cos[d ξs[η]]) ((ks^2 - 2 η^2) Cos[d ξp[η]] + 2 η^2 Cos[d ξs[η]]) + 1/(ξp[η]^2 ξs[η])
       (((ks^2 - 2 η^2) Sin[d ξs[η]] ξp[η] + 2 (-kp^2 + η^2) Sin[d ξp[η]] ξs[η]) ((ks^2 - 2 η^2)^2 Sin[d ξp[η]] + 4 η^2 Sin[d ξs[η]] ξp[η] ξs[η])))))/
     (Zo (8 η^2 (ks^2 - 2 η^2)^2 (1 - Cos[d ξp[η]] Cos[d ξs[η]]) + (Sin[d ξp[η]] Sin[d ξs[η]] ((ks^2 - 2 η^2)^4 + 16 η^4 ξp[η]^2 ξs[η]^2))/(ξp[η] ξs[η])))}}
```

Even though it can be not accomplished in closed form, also in this case an efficient semi-analytical factorization can be obtained using the Fredholm factorization (Appendix, [3, chapter 5]).

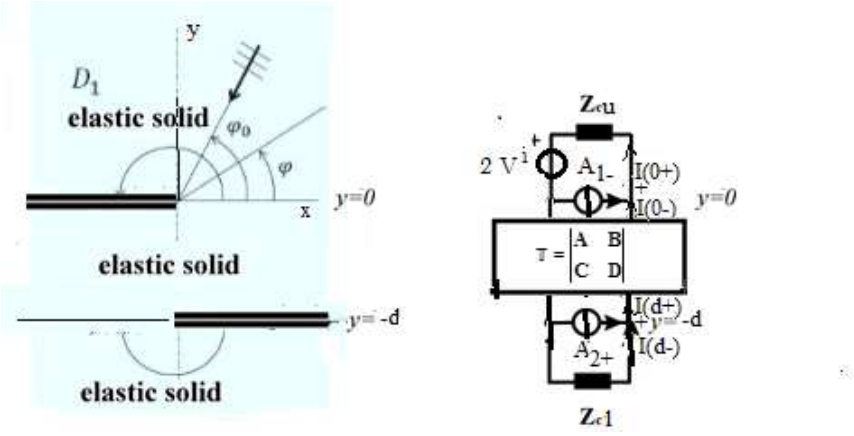


Fig. 13. a: Two opposite cracks in an homogeneous elastic solid illuminated by a plane wave; b: equivalent circuit model; c: the circuit simplification.

Finally let us consider another important problem: the diffraction by two opposite cracks (Fig. 13).

The analogous electromagnetic problem has been considered in [18]. With respect to the geometry of Fig.11, now also the electromagnetic WH matrix cannot be factorized in closed form. However as shown in [18], the Fredholm factorization produces excellent results. In particular the comparison with the results obtained by resorting to a finite element method shows the superiority of this semi-analytical technique with respect to numerical techniques.

The formulation of the problem indicated in fig.13 is the same of that of fig.11. The conceptual major difference in the network of fig.13 with respect to that of Fig. 11 is that the plus function $\mathbf{V}_{2+}$ must be substituted by a minus function $\mathbf{V}_{2-}$ and the minus function $\mathbf{A}_{2-}$ must be substituted by a plus function $\mathbf{A}_{2+}$. We get:

(124) $\begin{aligned} \mathbf{V}_{1+} &= \mathbf{A}\mathbf{V}_{2-} + \mathbf{B}\mathbf{I}(-d+), \\ \mathbf{I}(0-) &= \mathbf{C}\mathbf{V}_{2-} + \mathbf{D}\mathbf{I}(-d+), \end{aligned}$ two port equations of the slab – d<y<0

(125) $2\mathbf{V}^{i} + \mathbf{Z}_{cu}\mathbf{I}(0+) = \mathbf{V}_{1+}$ one-port equation of the medium y>0

(126) $-\mathbf{Z}_{cl}\mathbf{I}(d-) = \mathbf{V}_{2-}$ one-port equation of the medium y<0

(127) $\mathbf{I}(0-) + \mathbf{A}_{1-} = \mathbf{I}(0+)$ node equation on the port 1 of the two port

(128) $\mathbf{I}(-d-) + \mathbf{A}_{2+} = \mathbf{I}(-d+)$ node equation on the port 2 of the two port

Considering the 2D planar case $(\alpha_o = 0)$, in the above equations the vector and the matrices are defined in the euclidean space E2. The characteristic impedances $\mathbf{Z}_{cu} = (\mathbf{Y}_{cu})^{-1}$ and $\mathbf{Z}_{cl} = (\mathbf{Y}_{cl})^{-1}$ are given by equation (103) and the transmission matrix of the slab

$$\mathsf{T} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = e^{j\mathbf{k}d}$$

has been evaluated by MATHEMATICA:

$$A = \left\{\left\{\frac{(ks^2 - 2\eta^2)\,\mathrm{Cos}[d\,\xi p] + 2\eta^2\,\mathrm{Cos}[d\,\xi s]}{ks^2},\ \frac{i\,\eta\,((ks^2 - 2\eta^2)\,\mathrm{Sin}[d\,\xi p] - 2\,\xi p\,\xi s\,\mathrm{Sin}[d\,\xi s])}{ks^2\,\xi p}\right\},\right.$$
$$\left.\left\{-\frac{i\,\eta\,(2\,(-kp^2 + \eta^2)\,\xi s\,\mathrm{Sin}[d\,\xi p] + (ks^2 - 2\eta^2)\,\xi p\,\mathrm{Sin}[d\,\xi s])}{ks^2\,\xi p\,\xi s},\ \frac{2\eta^2\,\mathrm{Cos}[d\,\xi p] + (ks^2 - 2\eta^2)\,\mathrm{Cos}[d\,\xi s]}{ks^2}\right\}\right\};$$

$$B = \left\{\left\{\frac{e^{-i\,d\,(\xi p+\xi s)}\left(e^{i\,d\,\xi p} - e^{i\,d\,\xi s} - e^{i\,d\,(2\,\xi p+\xi s)} + e^{i\,d\,(\xi p+2\,\xi s)}\right)\mathrm{Zo}\,\eta\,(ks^2 - 2\eta^2)}{ks^3},\ -\frac{i\,\mathrm{Zo}\,\left((ks^2 - 2\eta^2)^2\,\mathrm{Sin}[d\,\xi p] + 4\eta^2\,\xi p\,\xi s\,\mathrm{Sin}[d\,\xi s]\right)}{ks^3\,\xi p}\right\},\right.$$
$$\left.\left\{-\frac{i\,\mathrm{Zo}\,\left(4\eta^2\,\xi p\,\xi s\,\mathrm{Sin}[d\,\xi p] + (ks^2 - 2\eta^2)^2\,\mathrm{Sin}[d\,\xi s]\right)}{ks^3\,\xi s},\ \frac{e^{-i\,d\,(\xi p+\xi s)}\left(e^{i\,d\,\xi p} - e^{i\,d\,\xi s} - e^{i\,d\,(2\,\xi p+\xi s)} + e^{i\,d\,(\xi p+2\,\xi s)}\right)\mathrm{Zo}\,\eta\,(ks^2 - 2\eta^2)}{ks^3}\right\}\right\};$$

$$C = \left\{\left\{\frac{\eta\,(-\mathrm{Cos}[d\,\xi p] + \mathrm{Cos}[d\,\xi s])}{ks\,\mathrm{Zo}},\ -\frac{i\,(\eta^2\,\mathrm{Sin}[d\,\xi p] + \xi p\,\xi s\,\mathrm{Sin}[d\,\xi s])}{ks\,\mathrm{Zo}\,\xi p}\right\},\ \left\{-\frac{i\,((kp - \eta)\,(kp + \eta)\,\xi s\,\mathrm{Sin}[d\,\xi p] + \eta^2\,\xi p\,\mathrm{Sin}[d\,\xi s])}{ks\,\mathrm{Zo}\,\xi p\,\xi s},\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{\eta\,(-\mathrm{Cos}[d\,\xi p] + \mathrm{Cos}[d\,\xi s])}{ks\,\mathrm{Zo}}\right\}\right\};$$

$$D = \left\{\left\{\frac{2\eta^2\,\mathrm{Cos}[d\,\xi p] + (ks^2 - 2\eta^2)\,\mathrm{Cos}[d\,\xi s]}{ks^2},\ \frac{i\,\eta\,((ks^2 - 2\eta^2)\,\mathrm{Sin}[d\,\xi p] - 2\,\xi p\,\xi s\,\mathrm{Sin}[d\,\xi s])}{ks^2\,\xi p}\right\},\right.$$
$$\left.\left\{-\frac{i\,\eta\,(2\,(-kp^2 + \eta^2)\,\xi s\,\mathrm{Sin}[d\,\xi p] + (ks^2 - 2\eta^2)\,\xi p\,\mathrm{Sin}[d\,\xi s])}{ks^2\,\xi p\,\xi s},\ \frac{(ks^2 - 2\eta^2)\,\mathrm{Cos}[d\,\xi p] + 2\eta^2\,\mathrm{Cos}[d\,\xi s]}{ks^2}\right\}\right\};$$

By eliminating from the above equations, the four not WH unknowns $\mathbf{I}(0-),\mathbf{I}(-d+),\mathbf{I}(0+),\mathbf{I}(-d-)$ we get a system of two WH equation of order four

$$\mathbf{G}\begin{vmatrix}\mathbf{V}_{1+}\\ \mathbf{A}_{2+}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\mathbf{A}^{s}_{1-}\\ \mathbf{V}_{2-}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\mathbf{A}^{p}_{1-}\\ \mathbf{0}\end{vmatrix}$$

where the WH kernel matrix is given by:

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} Y_{cu} + DB^{-1} - (C + DB^{-1}A)(B^{-1}A - Y_{cl})^{-1}B^{-1} & -(C + DB^{-1}A)(B^{-1}A - Y_{cl})^{-1} \\ (B^{-1}A - Y_{cl})^{-1}B^{-1} & (B^{-1}A - Y_{cl})^{-1} \end{vmatrix}$$

The explicit expression of G is not reported here for sake of brevity.

However working with MATHEMATICA we are able to execute the Fredholm factorization and to solve the elastic problem in a similar way as the similar electromagnetic problem [18]. The effort to accomplish the Fredholm factorization for two opposite cracks problem is similar to that has been required for solving the electromagnetic half plane in an arbitrary bianisotropic medium [14].

10. Conclusions

This paper presents a systematic approach for solving elastodynamics problems by extending the powerful circuit modelling used in electromagnetic wave theory. With this approach fundamental problems can

be formulated and solved in a conceptually simple manner. However for the presence of cumbersome algebraic manipulations the use of this technique requires to resort to modern algebraic manipulators as MATHEMATICA. In particular these codes seems indispensable for solving new problems in elastodynamics up to now not considered for their complexity.

In electromagnetism the circuital approach has been used to study very complicated diffraction problem that includes planar stratified regions and angular regions [see for example [19]-[26]. This paper shows that this methodology can be extended also to elastodynamic problem with similar geometries.

Appendix. The Fredholm factorization

In the W-H equations as (85)

$$\text{(A1)}\ \mathbf{A}_{-}^{d}(\eta) = \mathbf{Y}(\eta)\mathbf{V}_{+}(\eta) + \mathbf{I}_{+}^{p}(\eta)$$

the involved unknowns are a plus ($\mathbf{V}_{+}(\eta)$) and a minus ($\mathbf{A}_{-}^{d}(\eta)$) function that are respectively regular in an upper and a lower half-plane of η. While the classical factorization

$$\text{(A2)}\ \mathbf{Y}(\eta) = \mathbf{Y}_{-}(\eta)\cdot\mathbf{Y}_{+}(\eta)$$

eliminates the minus (or the plus) unknown algebraically [3, 5], in the Fredholm factorization [3], the elimination of the minus (or plus) function is obtained through a Cauchy decomposition. It introduces an integral equation that however can always be regularized and leads to a Fredholm integral equation (FIE) of the second type [3, chapter 5]. For instance, the elimination of the minus unknown $\mathbf{A}_{-}^{d}(\eta)$ yields:

(A3)

$$\mathbf{V}_{+}(\eta) + \frac{(\mathbf{Y}(\eta))^{-1}}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathbf{Y}(\eta') - \mathbf{Y}(\eta)}{\eta' - \eta}\mathbf{V}_{+}(\eta')d\eta' = (\mathbf{Y}(\eta))^{-1}\mathbf{I}_{+}^{p}(\eta) \quad \eta \in R$$

We call Fredholm factorization the numerical solution of (A3) when $\eta \in R$ and its analytical continuation for values of $\eta \notin R$.

We remember that the exact solution (95) obtained by the classical factorization is:

$$\text{(A4)}\ \mathbf{V}_{+}(\eta) = \mathbf{Y}_{+}^{-1}(\eta)\mathbf{Y}_{-}^{-1}(\eta_o)\mathbf{I}_{+}^{p}(\eta)$$

Comparing (A3) with (A4) we observe that the Fredholm factorization is neither so beautiful and ingenious as the classical factorization ideated by Wiener and Hopf in 1931. However we remark that :

The classical factorization (A2) can be obtained explicitly only for particular class of matrix kernels. Very few exact solutions are available and often their expressions must be treated with caution for the presence of complicated multi-valued functions ([3], Ch.4].

Conversely the equation (A3) is valid for arbitrary WH equations. Furthermore, even though the solution of (A3) in general requires a numerical approach, Fredholm factorization is a semi-analytical spectral methods that using suitable analytical continuation is capable (as the analytical methods) of physical interpretation in terms of field components. Therefore, this technique preserves the benefits of analytical solution and acquires some of the geometric flexibility of numerical methods.

Concerning the numerical solution of the Fredholm Integral Equation (A3) we approximate the integral with a simple quadrature form

$$\text{(A 5)}\quad \mathbf{V}_+(\eta) = -h \sum_{n=-A/h}^{A/h} \mathbf{M}(\eta,\eta_n)\mathbf{V}_+(\eta_n) + \mathbf{N}(\eta) \quad ,\eta \in R$$

where $\mathbf{M}(\eta,\eta') = \dfrac{(\mathbf{Y}(\eta))^{-1}}{2\pi j}\dfrac{\mathbf{Y}(\eta')-\mathbf{Y}(\eta)}{\eta'-\eta}$, $\mathbf{N}(\eta) = (\mathbf{Y}(\eta))^{-1}\mathbf{I}_+^p(\eta)$,

The presence in the FIE of the infinite support of integration does not constitute a major problem. It is sufficient to integrate on a suitable finite range 2*A* assuming samples $\mathbf{V}_+(\eta_n)$ in $\eta_n = h\,n$ with a step parameter h and $-A/h \le n \le A/h$.

A greater complexity arises in presence of kernel singularities close to the integration line. Resorting to expedients such the warping of the real axis into a line far from the kernel singularities [28,3], the numerical solution of the (A3) are obtained very easily and accurately.

Putting $\eta = \eta_m = h\,m$, $m = 0,\pm1,....,\pm A/h$ the numerical solution of (A5) yields the samples $\mathbf{V}_+(\eta_n), n = 0,\pm1,....,\pm A/h$. Starting from these samples the analytical continuation (A5) provide the values of $\mathbf{V}_+(\eta)$ outside the integration line . The integral present in the second member of (A3) define a sectional analytical function in η. Thus the analytical continuation holds until singularity lines of the kernel $\mathbf{M}(\eta,\eta')$ are present [27]. However, in planar stratified region such that of fig.10 and (11) this

analytical continuation is sufficient to evaluate the diffraction coefficients like (118) and the mode excitation coefficients like (119).

The Fredholm factorization was introduced in 2003 [28] inspired by Vekua [29]. Over the years it is proving to be a powerful tool also for solving generalized WH equations present in wedges problems [30, 31].

References

[1] L.B. Felsen, N. Marcuvitz, *Radiation and Scattering of Waves*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1973.

[2] L.M. Brekhovskikh, *Waves in layered media*, Academic Press, New York 1960.

[3] V.G. Daniele, R.S. Zich, *The Wiener Hopf method in Electromagnetics*, Scitech Publishing, 2014.

[4] J.D. Achenbach, A.K. Gautesen, *Geometrical theory of diffraction for three-D elastodynamics*, The Journal of Acoustical Society of America, 61, 1977, pp. 413-421.

[5] B. Noble, *Methods Based on the Wiener-Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations*, Pergamon Press, Belfast 1958.

[6] A.A. Oliner, *Historical Perspectives on Microwave*, IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, vol. 17, 1984, pp. 1022-1045.

[7] D.S. Saxon, *Notes on lectures by Julian Schwinger: Discontinuities in waveguides*, Feb. 1945.

[8] A.A Oliner, *Microwave Network Methods for Guided Elastic Waves*, IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, vol. 17, n. 11, 1969, pp. 812-826.

[9] B.A. Auld, *Acoustic Fields and Waves in Solids*, vol. I, John Wiley and Sons, New York 1973.

[10] A.D. Bresler, N. Marcuvitz, *Operator methods in electromagnetic field theory*, Report R-495,56, PIB-425, MRI Polytechnic Institute of Brooklyn, 1956, pp. 34-36.

[11] R. Zich, *Electromagnetic fields in bianisotropic stratified media*, Alta Frequenza 41, 1972, pp. 872-876.

[12] V.G. Daniele, *Wave propagation in stratified multifluid plasma*, Alta Frequenza 40, 1971, pp. 904-914.

[13] V.G. Daniele, R. Zich, *Radiation by arbitrary sources in anisotropic stratified media*, Radio Sci. 8, 1973, pp. 63-70.

[14] V.G. Daniele, R. Graglia, *Diffraction by a half-plane immersed in a linear bianisotropic medium*, Radio Sci., 42, RS6S05, 2007.

[15] J.D. Achenbach, *Wave propagation in elastic solid*, North-Holland/American Elsevier, 1973.

[16] J.D. Achenbach, A.K. Gautesen, *Elastodynamic Stress-Intensity Factors for a Semi-Infinite Crack Under 3-D Loading*, ASME. J. Appl. Mech. 44/2, 1977, pp. 243-249.

[17] J.D. Achenbach, A.K. Gautesen, H. McMaken, *Ray Methods for Waves in Elastic Solids: with Applications to Scattering by Cracks*, Pitman Advanced Publishing Program, 1982.

[18] V.G. Daniele, G. Lombardi, R.S. Zich, *The scattering of electromagnetic waves by two opposite staggered perfectly electrically conducting half-planes*, Wave Motion 83, 2018, pp. 241-263.

[19] V.G. Daniele, R.S. Zich, *Diffraction by two wedges*, in Proc. IEEE AP-S Int. Symp., Vancouver, BC, Canada, Jul. 2015, pp. 1380-1381.

[20] V. Daniele, G. Lombardi, R.S. Zich, *Analysis of coupled angular regions in spectral domain*, in Proc. URSI Int. Symp. Electromagn. Theory (EMTS), Aug. 2016, pp. 73-75.

[21] V.G. Daniele, G. Lombardi, R.S. Zich, *Network representations of angular regions for electromagnetic scattering*, PLoS ONE, vol. 12, n. 8, 2017, pp. e0182763-1-e0182763-53.

[22] V.G. Daniele, G. Lombardi, R.S. Zich, *On circuital modelling of diffraction problems in spectral domain*, in Proc. IEEE AP-S Int. Symp., San Diego, CA, USA, Jul. 2017, pp. 39-40.

[23] V.G. Daniele, G. Lombardi, R.S. Zich, *The electromagnetic field for a PEC wedge over a grounded dielectric slab: 1. Formulation and validation*, Radio Sci., vol. 52, n. 2, 2017, pp. 1472-1491.

[24] V.G. Daniele, G. Lombardi, R.S. Zich, *The electromagnetic field for a PEC wedge over a grounded dielectric slab: 2. Diffraction, modal field, surface waves, and leaky waves*, Radio Sci., vol. 52, n. 12, 2017, pp. 1492-1509.

[25] V.G. Daniele, G. Lombardi, R.S. Zich, *The double PEC wedge problem: diffraction and total far field*, IEEE Trans. Antennas Propag. 66, 2018, pp. 6482-6499.

[26] V.G. Daniele, G. Lombardi, R.S. Zich, *Radiation and scattering of an arbitrarily flanged dielectric-loaded waveguid*e, IEEE Trans. Antennas Propag. 67, 2019, pp. 7569-7584.

[27] F.D. Gakhov, *Boundary value problems*. Dover Publications, Inc. New York 1966.

[28] V.G. Daniele, *Fredholm Factorization, Internal Rep. ELT-2003*, DET, Politecnico di Torino, 2003, see http://personal.det.polito.it/vito.daniele.

[29] N.P. Vekua, *System of singular integral equations*, Noordhoff, The Netherlands 1967, pp. 173-203.

[30] V.G. Daniele, G. Lombardi, *Scattering and Diffraction by Wedges 1: The Wiener-Hopf Solution – Theory*, Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc. London, UK: ISTE, 2020.

[31] V.G. Daniele, G. Lombardi, *Scattering and Diffraction by Wedges 2: The Wiener-Hopf Solution – Advanced Applications*, Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc. London, UK: ISTE, 2020.

Acc. Sc. Torino
Memorie 1 (2022), 53-98, 22 figg. GEOSCIENZE

Mappatura di un territorio per il rischio di liquefazione sismo-indotta dei terreni a diverse scale geografiche

Carlo Giovanni Lai*

Memoria presentata dal Socio nazionale Carlo Cinquini
nell'adunanza del 15 dicembre 2021, ricevuta il 18 maggio 2022
e approvata nell'adunanza del 15 giugno 2022

Abstract. *The article illustrates some recent developments on the multi-scale zoning of a territory of the risk of earthquake-induced liquefaction of soils, a phenomenon of hydro-mechanical instability of particulate media particularly saturated loose sands.*
The subject was at the core of the LiquefACT research project funded by the European Commission in the three-year period 2016-2019 under the Horizon 2020 Programme. The loss of soil strength and the settlements stemming from seismic liquefaction are at the origin of extensive damage to structures and infrastructures in different parts of the world.
In Italy, the most recent disasters associated to soil liquefaction occurred in Emilia during the seismic sequence of May-June 2012. Although the most significant manifestations of soil liquefaction have historically been observed in earthquakes of large magnitude, cases of soil liquefaction are not infrequent in earthquakes of moderate magnitude as occurred in the 2012 Emilia sequence where at the two main shocks of May 20 and 29 was attributed a magnitude of 6.1 and 5.9 respectively.
The article illustrates some of the most significant findings attained by the LiquefACT project with regard to probabilistic zoning of a territory affected by earthquake-induced liquefaction risk. A particular attention is paid to the two extremes of the spectrum of spatial scaling: the zonation of continental Europe (mega-zoning) and the zonation at the municipal or sub-municipal scale (micro-zoning) which involved the territory of the municipality of Cavezzo in the province of Modena (Northern Italy).
In the article, the illustration of the methodology and the presentation of the results of the LiquefACT project are preceded by a brief review of the physics of the earthquake-induced soil liquefaction phenomenon,

* Università di Pavia; carlogiovanni.lai@unipv.it

on its highly local nature and on the difficulties of zoning a spatially-limited event in a large territory. The meaning of the terms risk and hazard which are often confused when referring to seismic liquefaction of soils and not only in the everyday language, is also revisited.

Keywords: H2020 LiquefACT, Horizon 2020 Programme, liquefaction risk, seismic liquefaction, soil fluidification.

Riassunto. *La memoria illustra alcuni recenti sviluppi sulla zonazione multi-scala di un territorio del rischio liquefazione sismo-indotta dei terreni, un fenomeno di instabilità idro-meccanica dei mezzi particellari, soprattutto sabbie sature poco addensate.*
Il tema è stato al centro del progetto di ricerca LiquefACT finanziato dalla Commissione Europea nel triennio 2016-2019 nell'ambito del Programma Horizon 2020. La perdita di resistenza del terreno e i cedimenti conseguenti alla liquefazione sismica sono all'origine di ingenti danni a strutture e infrastrutture in diverse parti del mondo.
In Italia, i disastri più recenti correlabili alla fluidificazione del suolo sono avvenuti in Emilia nella sequenza sismica del maggio-giugno 2012. Benché le manifestazioni più significative della liquefazione dei terreni siano storicamente state osservate in terremoti di magnitudo elevata, non sono infrequenti casi di fluidificazione del suolo in sismi di magnitudo moderata come è avvenuto nel sisma del 2012 in Emilia, dove alle due principali scosse del 20 e 29 maggio è stata attribuita una magnitudo rispettivamente di 6.1 e 5.9.
L'articolo illustra alcuni dei risultati più rilevanti conseguiti dal progetto LiquefACT per quel che concerne la zonazione probabilistica di un territorio del rischio liquefazione sismo-indotta. L'attenzione è posta ai due estremi dello spettro di scalatura spaziale: quello continentale dell'Europa (mega-zonazione) e quello municipale o submunicipale (micro-zonazione) che ha visto coinvolto il territorio del comune di Cavezzo in provincia di Modena.
Nella memoria, l'illustrazione della metodologia e la presentazione dei risultati del progetto LiquefACT sono preceduti da una breve disamina sulla fisica del fenomeno liquefazione sismica dei terreni, sulla sua natura fortemente locale e sulle difficoltà di zonare un evento spazialmente circoscritto in un territorio esteso. Con l'occasione viene anche rivisitato il significato dei termini rischio e pericolosità che non di rado vengono confusi quando riferiti alla liquefazione sismica dei terreni e non solo nel linguaggio comune.

Parole chiave: fluidificazione del suolo, liquefazione sismica, Progetto LiquefACT, Programma Horizon 2020, rischio di liquefazione.

1. Liquefazione sismo-indotta dei terreni: generalità sul fenomeno

La liquefazione o fluidificazione sismo-indotta dei terreni è un fenomeno di instabilità del comportamento idro-meccanico dei mezzi particellari che riguarda principalmente i depositi saturi di sabbie poco addensate.

L'innesco ha origine a partire da una progressiva diminuzione della resistenza al taglio e della rigidezza del terreno causata da un aumento della pressione interstiziale indotto dallo scuotimento sismico. Anche i materiali granulari saturi infatti, benché siano caratterizzati da una conducibilità idraulica relativa elevata, se sottoposti a sforzi di taglio ciclici (Fig. 1) sufficientemente intensi possono dare origine ad un accumulo delle pressioni interstiziali con riduzione o addirittura annullamento degli sforzi efficaci e quindi della resistenza al taglio.

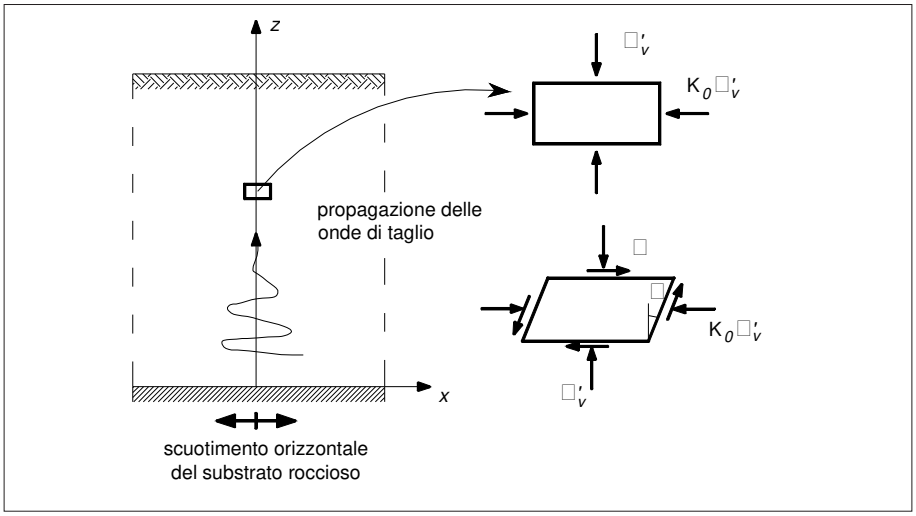


Fig. 1. Stato di sforzo ciclico indotto in un deposito di terreno granulare da un terremoto (*fonte*: Lai *et al.*, 2009 modificata da Sawicki e Mierczyński, 2006).

Come mostrato in Fig. 1, in assenza del sisma (condizioni geostatiche), un elemento di terreno è in equilibrio sotto l'effetto dello sforzo di confinamento dovuto al peso proprio degli strati sovrastanti. L'insorgenza degli sforzi di taglio ciclici causati dalla propagazione delle onde sismiche trasversali tenderebbe a produrre in assenza di acqua (e cioè se la sabbia fosse asciutta) una diminuzione di volume con successivo addensamento. Tuttavia, in presenza di fluido interstiziale e di una velocità di applicazione degli sforzi di taglio superiore alla velocità di filtrazione dell'acqua nei pori, la riduzione di volume

dell'elemento di terreno non può avvenire (almeno temporaneamente) a causa della sostanziale incompressibilità dell'acqua. L'invarianza del volume rappresenta un vincolo cinematico che modifica il regime di sforzo nel mezzo poroso con aumento della pressione interstiziale e conseguente riduzione dello sforzo di confinamento. Se la sabbia è poco addensata e l'ampiezza degli sforzi ciclici di taglio sufficientemente elevata, la pressione dell'acqua aumentando progressivamente può giungere ad uguagliare lo sforzo di confinamento iniziale. In queste condizioni, sulla sabbia non agisce alcuno sforzo intergranulare e, in assenza di forze inter-particellari, i singoli granelli cessano di essere in contatto e fluttuano nel fluido come in una sospensione (Fig. 2).

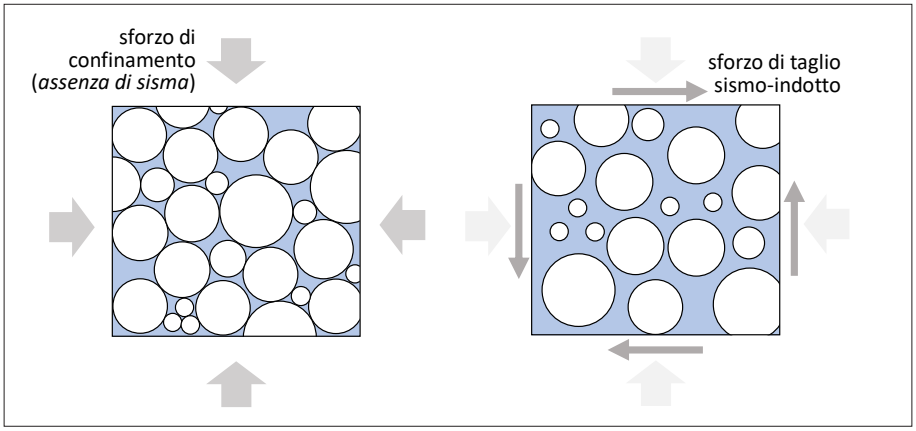


Fig. 2. *Sinistra*: situazione di equilibrio e stabilità di un campione di sabbia saturo, soggetto ad uno sforzo di confinamento iniziale. *Destra*: situazione di incipiente liquefazione che si verifica quando la pressione interstiziale aumenta, a seguito degli sforzi di taglio ciclici indotti dal sisma fino ad uguagliare il valore iniziale dello sforzo di confinamento (*fonte*: modificata da Lai *et al.*, 2009).

L'intervallo temporale durante il quale il terreno permane in uno stato fluido dipende dalle condizioni di drenaggio del deposito e dalla durata di applicazione degli sforzi di taglio ciclici, dopo l'innesco del fenomeno. Maggiore è la durata e l'intensità degli sforzi ciclici di taglio, più lunga è la permanenza della condizione fluida. Dal lato terreno, più grande è lo spessore del deposito e più fine è la sabbia che lo costituisce, maggiore è il tempo necessario affinché si dissipi l'accumulo di pressione interstiziale e quindi anche in questo caso maggiormente estesa è la durata dello stato di fluidità del terreno.

Per ulteriori dettagli sulla meccanica della liquefazione sismica (la liquefazione dei terreni può anche avvenire in condizioni statiche), si rimanda il lettore interessato ai numerosi lavori disponibili nella letteratura tecnica. Si

citano tra gli altri gli articoli di Castro (1969) e Ishihara *et al.* (1975) e le monografie di Kramer (1996) e Jefferies e Been (2015). Quest'ultima ha il pregio di inquadrare il fenomeno nell'ambito della *teoria dello stato critico* che rappresenta oggi il modello teorico più rigoroso per interpretare il comportamento idro-meccanico dei terreni sia in campo statico che dinamico.

Una volta innescata, la liquefazione sismica dei terreni può dare origine a cedimenti permanenti della superficie del piano campagna rilevanti che nei casi più estremi possono portare a ribaltamenti e/o sprofondamenti di interi edifici (Fig. 3), strutture e parti di infrastrutture.

Fig. 3. Ribaltamento di edifici causato dalla liquefazione sismo-indotta dei terreni. Terremoto di Kocaeli (Turchia) del 17 agosto 1999 di magnitudo Richter 7.4 (*fonte*: https://nisee.berkeley.edu/elibrary/).

La liquefazione può anche innescare movimenti franosi e fenomeni di instabilità improvvisi in pendii naturali o artificiali come rilevati e dighe in terra. Ciò avviene quando la resistenza al taglio richiesta per l'equilibrio statico di una massa di terreno su un versante acclive è maggiore della resistenza al taglio che il terreno può offrire nel suo stato liquefatto o di incipiente liquefazione. Le *frane per liquefazione* (Fig. 4) sono fenomeni molto pericolosi perché improvvisi e capaci di generare un flusso verso valle di ingenti quantitativi di materiale (*colamenti rapidi*). Esse si verificano quando, a causa della generazione di elevate pressioni interstiziali indotte dal sisma, la resistenza al taglio della massa

di terreno instabile diventa inferiore agli sforzi di taglio esistenti lungo il pendio in condizioni statiche. Pertanto, il fenomeno è governato dagli sforzi litostatici.

Fig. 4. Collasso dell'argine di monte prodotto dalla frana per liquefazione della diga inferiore di San Fernando, California dopo il terremoto del 9 febbraio 1971 di magnitudo Richter 6.6 (*fonte*: https://nisee.berkeley.edu/elibrary/).

Sebbene le manifestazioni più significative della liquefazione sismica dei terreni siano state osservate durante terremoti con magnitudo M_W superiore a 7 in aree epicentrali suscettibili (ad es. Charleston, Stati Uniti, M_W 7.3, 1886; Alaska, Stati Uniti, M_W 9.2, 1964; Niigata, Giappone, M_W 7.6, 1964; Izmit, Turchia, M_W 7.6, 1999), casi rilevanti di fluidificazione del suolo si sono verificati anche in occasione di eventi sismici di magnitudo relativamente moderata quali il terremoto di Kobe (Giappone), M_W 6.8 nel 1995 ed il terremoto di Christchurch (Nuova Zelanda), M_W 6.3 nel 2011.

In Italia, gli eventi sismici del 20 e 29 maggio 2012 che hanno colpito la regione Emilia-Romagna, rispettivamente di M_W 6.1 e 5.9 (Rovida *et al.*, 2016) sono ulteriori esempi di sismi moderati che hanno provocato numerosi casi di liquefazione in depositi granulari.

La liquefazione dei terreni prodotta dallo scuotimento sismico può essere causa di considerevoli perdite economiche. Nel caso della sequenza emiliana del maggio-giugno 2012, il rilievo macrosismico ha evidenziato ingenti danni a strutture e infrastrutture correlati a rotture e cedimenti del terreno indotti dalla liquefazione. Si stima che circa 12.000 siano stati gli edifici gravemente danneggiati (Modoni *et al.*,

2021). Nella sequenza di Christchurch del 2010-2011, la liquefazione ha arrecato danni più o meno gravi a circa 20.000 edifici residenziali e a più di un terzo delle infrastrutture dell'area metropolitana. Si stima che l'impatto economico sia costato alla Nuova Zelanda una cifra compresa tra 16 e 19 miliardi di euro (Cubrinovski *et al.*, 2012). Nel grande sisma di Tohoku-Oki nel Giappone orientale del 2011 (M_W 9.0) circa 27.000 edifici, più di 2.000 argini e numerosi porti marittimi hanno subito danni a causa della liquefazione dei terreni (Yasuda *et al.*, 2012).

2. Rischio o pericolosità da liquefazione sismica dei terreni?

Secondo l'accezione probabilistica classica[1], il *rischio sismico* associato ad una costruzione, un pendio acclive ed in generale ad un sistema, è la *convoluzione*[2] di tre variabili aleatorie assunte indipendenti e quindi non-correlate:

- pericolosità
- vulnerabilità
- esposizione

La *pericolosità* è definita come la probabilità che un determinato valore di un parametro di scuotimento del suolo (per es. l'accelerazione di picco) venga superato al sito dove sorge la costruzione o il pendio acclive o il sistema entro un intervallo di tempo prestabilito (per es. 50 anni che è la vita nominale di una costruzione ordinaria).

La *vulnerabilità* descrive invece la probabilità che una data costruzione, pendio acclive o sistema subisca un determinato livello di danno per uno scuotimento (e quindi una pericolosità sismica) di prefissata intensità. La vulnerabilità è una misura quantitativa della propensione al danno di una struttura o sistema a causa della vibrazione del suolo indotta dal sisma.

Infine, l'*esposizione* rappresenta il valore economico e sociale della costruzione o del sistema di cui si vuole calcolare il rischio sismico. L'esposizione scala il rischio sismico in funzione delle potenziali perdite economiche e di vite umane che un terremoto può causare in un particolare sistema. Per esempio, due costruzioni identiche ubicate nello stesso sito saranno caratterizzate dalla stessa pericolosità e vulnerabilità sismica tuttavia se una costruzione è adibita a scuola e l'altra a deposito di stoccaggio di attrezzature, la prima

---

[1] La definizione formale di *rischio* dai disastri naturali attualmente adottata nella comunità scientifica internazionale è stata proposta dall'Unesco (Organizzazione delle Nazioni Unite per l'Educazione, la Scienza e la Cultura) nel 1972 (Unesco, 1972).

[2] Operazione matematica che consiste nel comporre, per sovrapposizione degli effetti, due o più enti concomitanti come ad esempio pericolosità, vulnerabilità ed esposizione sismica che interagiscono vicendevolmente nello spazio e nel tempo.

costruzione ha una esposizione significativamente più elevata della seconda perché in caso di sisma la potenziale perdita di vite umane conferisce alla scuola un elevato costo sociale. Non è infrequente che i termini *pericolosità* e *rischio* vengano confusi e ciò non solo nel linguaggio comune anche a causa di un'errata traduzione del vocabolo inglese *hazard*. L'ambiguità nasce dal fatto che non sempre viene preventivamente dichiarato l'oggetto di cui si vuole calcolare il rischio sismico.

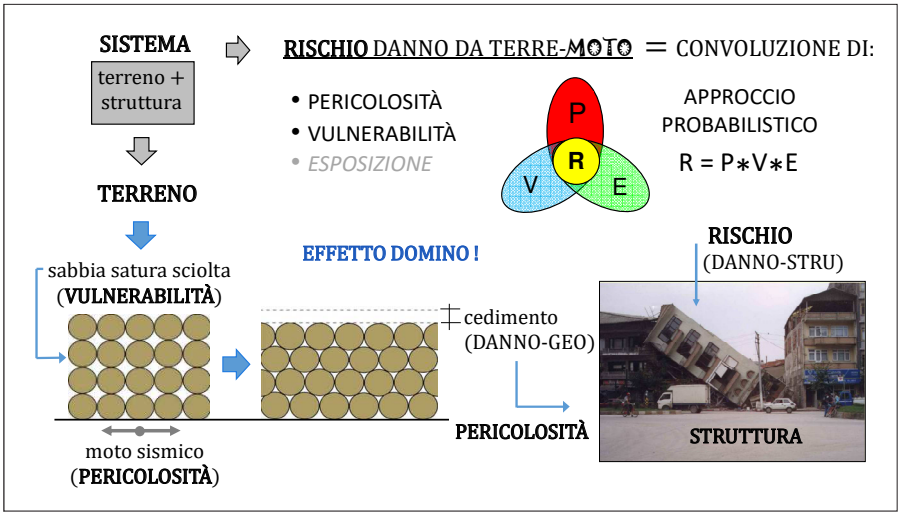


Fig. 5. Schema concettuale del rischio associato alla liquefazione sismica dei terreni e alle definizioni di pericolosità e vulnerabilità del sistema esaminato.

In Fig. 5 è mostrata l'applicazione delle definizioni di rischio, vulnerabilità e pericolosità alla liquefazione sismica di un deposito di terreno. Per semplicità l'esposizione non è stata presa in conto.

Se l'oggetto di cui si vuole calcolare il rischio da liquefazione sismica è il deposito di terreno, la pericolosità conserva il significato originario di rappresentare l'intensità del moto sismico atteso al sito. La vulnerabilità del deposito invece, descrive la suscettibilità del terreno a liquefare e dipende da numerosi fattori, tra cui lo stato di addensamento della sabbia e il suo grado di saturazione. Se tuttavia il sistema di cui si vuole calcolare il rischio è una costruzione edificata su un suolo potenzialmente liquefacibile, la pericolosità è rappresentata dall'entità dei cedimenti del terreno prodotti dalla liquefazione i quali, se rilevanti e spazialmente disomogenei, possono produrre il ribaltamento della costruzione. In questo caso il rischio da

liquefazione sismica è la probabilità che la costruzione edificata su suolo instabile subisca un determinato livello di danno o perdita economica a causa della liquefazione sismica dei terreni in un prefissato intervallo di tempo. La vulnerabilità della costruzione invece, è la sua propensione a subire un danno a causa del cedimento disomogeneo terreno. In questa interpretazione il rischio per la costruzione appare come il risultato di un effetto a cascata (o effetto domino): lo scuotimento sismico del suolo determina la liquefazione del deposito di terreno che cede in modo disomogeneo e produce il ribaltamento della struttura.

Poiché l'oggetto di studio di questo articolo è la liquefazione sismica dei terreni, indipendentemente dalle conseguenze sul costruito, il significato dei termini rischio, pericolosità e vulnerabilità è quello che compete al sistema "deposito di terreno".

3. Zonazione del rischio liquefazione sismica dei terreni: un ossimoro

La mappatura di un territorio del rischio liquefazione sismica dei terreni può apparire un ossimoro stante la natura marcatamente locale del fenomeno. La Fig. 6 evidenzia questo aspetto attraverso quattro possibili livelli di zonazione territoriale: la *microzonazione* che ha per oggetto la mappatura del rischio liquefazione di un centro urbano o sub-urbano, la *mesozonazione* che è orientata alla scala regionale, la *macrozonazione* che affronta il problema di una nazione intera e la *megazonazione* che riguarda un continente.

Se si considera che la perdita di resistenza al taglio del terreno indotta dal sisma si manifesta a livello dei singoli grani e quindi ad una scala microscopica, e che l'entità degli effetti della liquefazione sulla superficie libera del piano campagna dipendono, per una data severità dello scuotimento sismico, dallo spessore dello strato liquefatto, dalla sua profondità dal piano campagna nonché dalle condizioni al contorno idrauliche (Cubrinovski *et al.*, 2017) lungo una verticale di un profilo stratigrafico (Fig. 6), la zonazione di un territorio anche piccolo, appare un'operazione quasi priva di significato. Ciò in virtù della risoluzione plano-altimetrica a cui sono tipicamente disponibili in forma digitale i dati geologici, idrogeologici, geotecnici, geofisici e di pericolosità sismica.

Nonostante le premesse siano sfavorevoli, una rappresentazione approssimativa della variabilità spaziale del rischio liquefazione all'interno di una singola nazione è in realtà alla portata delle attuali conoscenze, almeno in

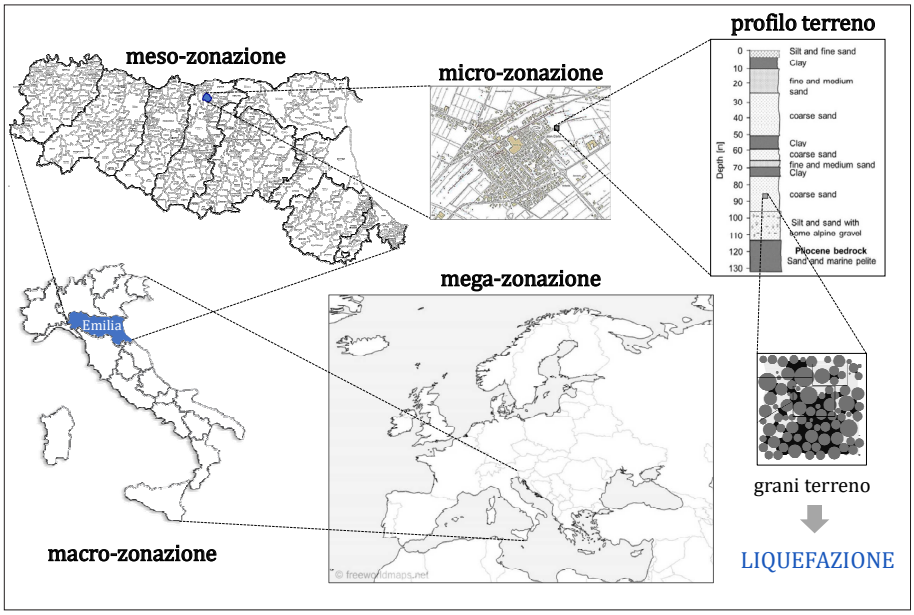


Fig. 6. Zonazione multi-scala del rischio liquefazione sismica dei terreni in relazione alla natura intrinsecamente locale (e cioè microscopica) del fenomeno.

gran parte dei Paesi avanzati. D'altro canto, la disponibilità di una mappa di macrozonazione del rischio liquefazione sismica può essere di grande utilità per gli amministratori di un Paese nell'identificare i territori potenzialmente a rischio. Ciò a sua volta potrebbe motivare l'interesse a lanciare programmi di ricerca finalizzati a condurre indagini e approfondimenti nei suddetti territori al fine di redigere carte di maggiore accuratezza come le mappe di meso- e micro- zonazione.

La zonazione probabilistica multi-scala del rischio liquefazione sismica dei terreni è stata l'oggetto di uno studio recente condotto congiuntamente dall'Università di Pavia e dalla Fondazione Eucentre nell'ambito delle attività di ricerca del progetto LiquefACT finanziato dalla Commissione Europea di cui nella prossima sezione verranno forniti maggiori dettagli. In questo studio sono state prodotte mappe di megazonazione dell'Europa del rischio liquefazione sismica dei terreni e di microzonazione di quattro centri urbani in Italia, Portogallo, Slovenia e Turchia per i tempi di ritorno di 475, 975 e 2.475 anni. Per calcolare tali mappe sono stati utilizzati modelli predittivi di apprendimento automatico (in inglese *machine learning*).

4. Il progetto europeo H2020 LiquefACT

La valutazione e mitigazione del rischio liquefazione sismica dei terreni e dei suoi effetti sul costruito sono stati oggetto nel periodo 2016-2019 di un ambizioso progetto di ricerca denominato LiquefACT (http://www.liquefact.eu/), acronimo di *Assessment and mitigation of liquefaction potential across Europe: a holistic approach to protect structures and infrastructures for improved resilience to earthquake-induced liquefaction disasters* (Valutazione e mitigazione del potenziale di liquefazione in Europa: un approccio olistico per la protezione di strutture e infrastrutture per una migliore resilienza ai disastri causati dalla liquefazione sismo-indotta) e finanziato dalla Commissione Europea mediante il programma *Horizon 2020 Research and Innovation* (Call H2020-DRS-2015, Grant Agreement n. 700748).

Con uno stanziamento di circa 5 milioni di euro, LiquefACT è il più grande progetto di ricerca mai finanziato dalla Commissione Europea sulla valutazione e mitigazione in Europa dei rischi associati alla liquefazione sismica dei terreni (Lai, 2021).

Il progetto si è concluso ad ottobre 2019 con una durata di tre anni e mezzo. Ad esso hanno preso parte undici enti di cui sette università, Anglia Ruskin University, Università di Pavia con la Fondazione Eucentre, Università di Napoli Federico II, Università di Cassino, Università di Porto, Università di Lubiana e Università di Istanbul, e quattro gruppi industriali, gli italiani Trevi ed IsmGeo, il norvegese Norsar e lo sloveno SLP.

L'Università inglese di Anglia-Ruskin ha svolto il ruolo di coordinatore generale del progetto mentre l'Università di Pavia quello di coordinatore scientifico. La Fig. 7 mostra la collocazione geografica dei partecipanti al progetto LiquefACT e le nazioni europee interessate.

Il progetto non si è occupato solo della riduzione della vulnerabilità del costruito alla liquefazione sismica dei terreni in Europa, ma anche di come migliorare la resilienza delle comunità di persone nelle fasi di ripresa post-sismica. La Fig. 8 mostra l'architettura del progetto LiquefACT con indicate le principali interrelazioni tra i principali pacchetti di lavoro.

Per quel che concerne la valutazione della pericolosità del fenomeno liquefazione (pacchetto di lavoro no. 2; WP2 in Fig. 8), risultati importanti ottenuti dal progetto includono la realizzazione del catalogo storico delle manifestazioni di liquefazione sismica in Europa, una carta probabilistica di megazonazione del pericolo liquefazione in Europa continentale per diversi periodi di ritorno, linee guida per la valutazione del pericolo liquefazione a scala urbana e sub-urbana (microzonazione) con applicazione a quattro siti

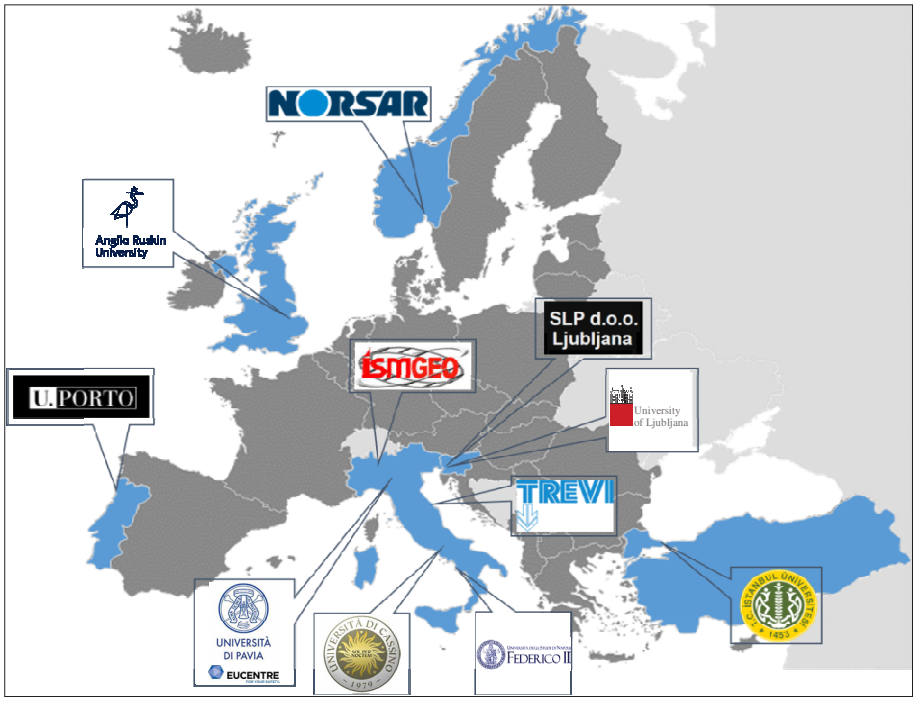


Fig. 7. Istituzioni accademiche e industriali del consorzio europeo LiquefACT (*fonte*: modificata da http://www.liquefact.eu/).

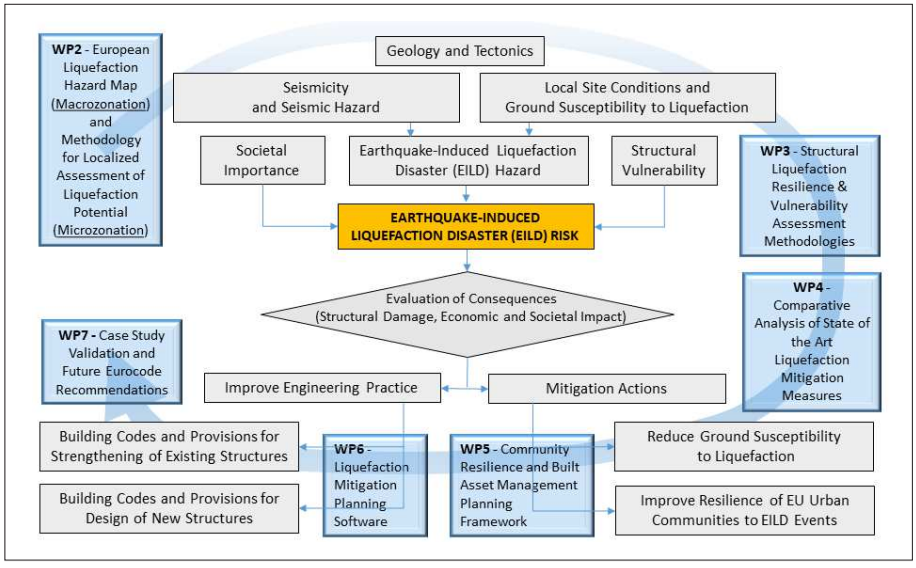


Fig. 8. Diagramma di flusso che illustra l'architettura del progetto LiquefACT (*fonte*: Pecker, 2021).

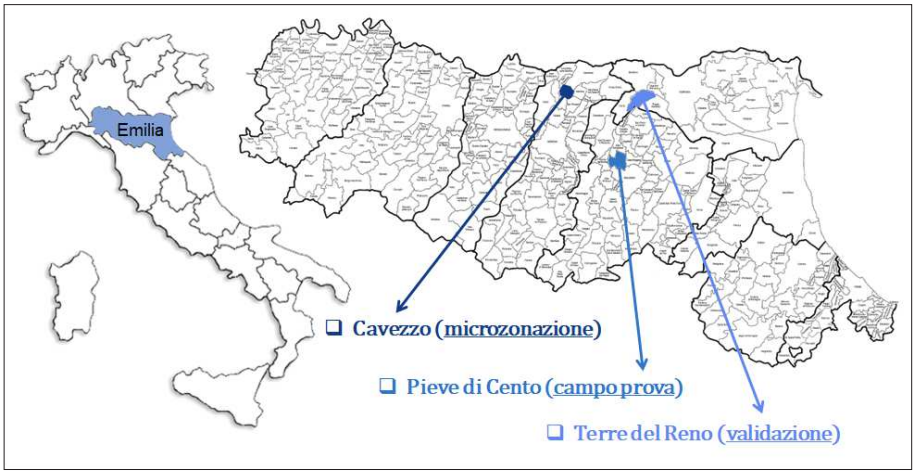


Fig. 9. Attività sperimentali del progetto LiquefACT svolte in Italia nella regione Emilia-Romagna.

europei prescelti che sono stati adeguatamente caratterizzati da un punto di vista geologico, geofisico e geotecnico mediante una campagna di indagini sperimentali in sito e di laboratorio.

Lo studio della vulnerabilità e resilienza delle costruzioni e delle infrastrutture alla liquefazione sismica dei terreni è stato affrontato nel pacchetto di lavoro no. 3 (WP3 in Fig. 8). Prodotti importanti ottenuti in questo pacchetto includono modelli empirici di fragilità e danneggiamento di edifici in cemento armato e muratura. Nello sviluppo di questi modelli è stata presa in conto l'influenza, nella risposta strutturale, oltreché del cedimento del suolo indotto dalla liquefazione, anche del concomitante scuotimento. Ciò è stato fatto considerando l'incertezza dei parametri in ingresso ai modelli.

In LiquefACT la componente sperimentale ha avuto un ruolo fondamentale ed è stata l'oggetto del pacchetto di lavoro no. 4 (WP4 in Fig. 8). La Fig. 9 mostra le attività sperimentali del progetto che si sono svolte in Italia nella regione Emilia-Romagna. Esse hanno compreso la campagna di indagini finalizzate alla microzonazione sismica del comune di Cavezzo in provincia di Modena, le prove a Pieve di Cento in provincia di Bologna approntate per sperimentare l'efficacia dei metodi di mitigazione della suscettibilità a liquefazione dei terreni e il territorio del comune di Terre del Reno in provincia di Ferrara i cui dati macrosismici rilevati nella ricognizione post-sismica della sequenza del 2012 sono stati utilizzati come caso di studio per validare la metodologia sviluppata in LiquefACT per la valutazione del rischio sul costruito da liquefazione sismica.

L'esperimento più significativo è stato il campo prova allestito da Trevi SpA nel comune di Pieve di Cento per collaudare due tecnologie innovative per la mitigazione del rischio liquefazione: l'induzione artificiale in terreni saturi della parziale saturazione e l'installazione di dreni sub-orizzontali, tecnica quest'ultima molto efficace anche per la protezione di costruzioni esistenti. Per simulare lo scuotimento del suolo indotto dal sisma e poter così valutare la bontà dello specifico trattamento utilizzato nel campo prova, è stato utilizzato un potente generatore di onde sismiche trasversali fatto appositamente arrivare dalla Francia (Lai, 2021).

In LiquefACT le indagini sperimentali hanno incluso anche prove di laboratorio avanzate utilizzando una centrifuga geotecnico-sismica. I terreni sono materiali barotropici e come tali il loro comportamento meccanico è fortemente dipendente dalla tensione di confinamento e quindi dalla profondità dell'elemento di terreno dal piano campagna. L'uso della centrifuga permette di riprodurre gli sforzi litostatici alla scala del prototipo anche in modelli fisici di dimensioni ridotte. La presenza di un tavolo vibrante montato all'interno della centrifuga consente anche l'attuazione di prove dinamiche e quindi di simulare l'effetto di un terremoto.

La centrifuga geotecnico-sismica è una apparecchiatura sperimentale molto complessa. In Europa ne esistono attualmente quattro, una di queste si trova in Italia nel laboratorio geotecnico avanzato di IsmGeo Srl a Seriate in provincia di Bergamo.

In LiquefACT le prove in centrifuga sono state effettuate con il duplice scopo di riprodurre i risultati sperimentali ottenuti nel campo prova di Pieve di Cento e simulare l'influenza, sulla suscettibilità del terreno alla liquefazione, della presenza di una costruzione nonché dell'utilizzo dei dreni verticali (Pecker, 2021).

Gli aspetti di LiquefACT riguardanti la resilienza di una comunità sociale ai danni prodotti dalla liquefazione sismica dei terreni sono stati indagati nel pacchetto di lavoro no. 5 (WP5 in Fig. 8). Oltre a studiare come migliorare la resilienza di una comunità nelle fasi successive al terremoto, questo pacchetto di lavoro ha affrontato il problema dello sviluppo di un modello commerciale che contempli l'inclusione di tecniche di mitigazione del rischio liquefazione in siti di costruzioni da realizzare e nel miglioramento dei terreni in siti di costruzioni esistenti.

Il prodotto forse più importante dell'intero progetto è la piattaforma computazionale realizzata per integrare i risultati ottenuti dai pacchetti di lavoro scientifici. Questo è stato l'obiettivo del pacchetto di lavoro 6 (WP6 in

Fig. 8). La piattaforma computazionale è uno strumento informatico che nella sua versione base è accessibile gratuitamente da qualunque utente europeo. Esso consentirà ad ingegneri, geologi, architetti, amministratori pubblici e addetti del settore delle costruzioni di effettuare valutazioni di scenari di rischio dei danni prodotti dalla liquefazione sismica in siti di edifici residenziali, strutture pubbliche, infrastrutture, analisi costi-benefici e di supporto decisionale all'adozione di tecniche di mitigazione, valutazione dell'impatto socio-economico della riduzione del rischio e degli interventi di miglioramento e infine della capacità di resilienza di una comunità di persone nella fase post-sismica (Lai, 2021).

Le metodologie sviluppate in LiquefACT e implementate nella piattaforma computazionale sono state validate (pacchetto di lavoro 7; WP7 in Fig. 8) in tre casi di studio ben documentati a Urayasu in Giappone (terremoto di Tohoku Oki nel 2011), a Christchurch in Nuova Zelanda (sequenza sismica 2010-2011) e nelle Terre del Reno in Emilia (terremoto del maggio-giugno 2012).

I risultati più rilevanti conseguiti nel progetto LiquefACT sono stati raccolti in 12 articoli scientifici che hanno formato un numero speciale della rivista internazionale *Bulletin of Earthquake Engineering* che è stato pubblicato nel mese di agosto del 2021 (BEE, 2021). Alcuni di questi risultati sono stati inclusi nella Parte 5 dell'Eurocodice 8 attualmente in fase di revisione. Ulteriori dati e informazioni sul progetto LiquefACT possono essere reperiti sul sito web http://www.liquefact.eu/ del progetto che è ancora attivo.

5. Megazonazione del rischio liquefazione nel continente europeo

In Europa le manifestazioni storiche documentate di liquefazione sismo-indotta nel periodo 1117-2019 cioè in 902 anni sono state 929. Esse sono state causate da 204 terremoti avvenuti in 19 Paesi europei (Bozzoni *et al.*, 2021a). La Fig. 10 mostra la distribuzione geografica degli eventi sismici che in Europa hanno prodotto liquefazione dei terreni. La carta mostra che le nazioni europee che storicamente sono state interessate dalla liquefazione sismica dei terreni sono soprattutto quelle che sia affacciano sul mar Mediterraneo e quindi Italia, Spagna, i paesi balcanici come la Grecia, l'Albania, la Croazia, la Romania, la Serbia e la Turchia. Tra gli altri Paesi interessati si citano l'Ungheria e il Portogallo.

La carta mostrata in Fig. 10 è stata costruita a partire dai dati contenuti nel catalogo digitale ECLiq, acronimo di *European interactive Catalogue of*

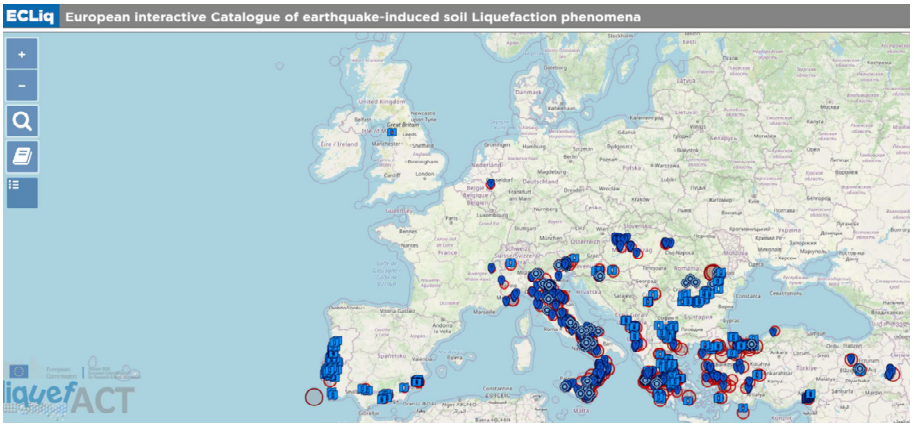


Fig. 10. Catalogo interattivo ECLiq degli eventi storici di liquefazione sismo-indotta in Europa nel periodo 1117-2019 (*fonte*: Bozzoni *et al.*, 2021a).

earthquake-induced soil Liquefaction phenomena (Catalogo europeo interattivo dei fenomeni di liquefazione del suolo sismo-indotti) recentemente pubblicato da Bozzoni *et al.* (2021a). Questo archivio digitale è stato uno dei prodotti del progetto LiquefACT. Esso può essere consultato gratuitamente attraverso la piattaforma georeferenziata web-GIS accessibile al link http://ecliq.eucentre.it/.

Gli eventi contenuti nel catalogo ECLiq nel periodo 1117-2019 includono i seguenti dati e metadati: anno, mese e giorno dell'evento sismico, coordinate geografiche dell'epicentro con stima dell'incertezza, magnitudo M_W con stima dell'incertezza, profondità focale (se disponibile), intensità macrosismica epicentrale, coordinate geografiche con stima dell'incertezza del sito o dei siti dove sono stati osservati e adeguatamente documentati i fenomeni di liquefazione, distanza epicentrale con stima dell'incertezza, intensità macrosismica al sito o ai siti in cui sono state osservate evidenze di liquefazione, una descrizione sommaria della tipologia di manifestazione della liquefazione come ad esempio la formazione di crateri, vulcanelli di sabbia, fuoriuscite di acqua e sabbia, cedimenti ed espansioni laterali di terreno, i riferimenti bibliografici delle fonti originali dei dati utilizzati per redigere il catalogo.

Un archivio il più possibile completo delle evidenze storiche di liquefazione sismica in un determinato territorio è fondamentale per lo sviluppo di modelli predittivi sull'accadimento di fenomeni di instabilità del suolo

in attività sismiche future e nella validazione di questi stessi modelli. In LiquefACT, il modello predittivo per il continente europeo è stato realizzato utilizzando due tipologie di algoritmi: la *regressione logistica* (Baise *et al.*, 2012; Zhu *et al.*, 2015; Zhu *et al.*, 2017) e la procedura di *analisi gerarchica* (Saaty, 1980; Panahi *et al.* 2014; Moustafa, 2015).

La regressione logistica è un algoritmo basato sull'apprendimento automatico a partire da banche dati di evidenze storiche di liquefazione sismica in un determinato territorio. È un metodo basato sull'utilizzo di dati ed è per questa ragione che in inglese viene denominato *data-driven method*. Per contro, l'analisi gerarchica è una procedura decisionale multi-criterio interamente basata sull'utilizzo del parere esperto e pertanto in inglese è denominata *knowledge-driven method*.

L'implementazione di questi due algoritmi ha preventivamente richiesto la realizzazione di una piattaforma computazionale georeferenziata in cui sono stati integrati e tra loro armonizzati dati geospaziali eterogenei a scala continentale e riguardanti la geologia di superficie, la geomorfologia, l'idrogeologia, i modelli digitali del terreno e la pericolosità sismica del territorio europeo.

L'idea di base nell'applicazione di entrambi gli algoritmi è quella di combinare i dati geospaziali, disponibili a scala continentale, utilizzando un certo numero di *variabili esplicative* che descrivano sia la suscettibilità del suolo alla liquefazione che la pericolosità sismica. Nei metodi denominati *data-driven* come la regressione logistica, l'algoritmo è addestrato a prevedere il verificarsi o il non verificarsi (l'esito è binario) della liquefazione lungo una verticale stratigrafica al verificarsi di determinate condizioni specificate dalle variabili esplicative sopracitate.

Nel caso invece dei metodi denominati *knowledge-driven* come l'analisi gerarchica, le variabili esplicative vengono classificate e la loro importanza relativa viene valutata assegnando, secondo un parere esperto, dei pesi attraverso il calcolo di una matrice di confronto a coppie. La mappa di rischio liquefazione sismica di un territorio viene quindi calcolata sulla base di una somma pesata di variabili esplicative concomitanti. Un limite importante del metodo è rappresentato dalla soggettività della graduatoria delle variabili esplicative e dai pesi assegnati.

Nel prosieguo dell'articolo verrà descritto con maggiore dettaglio il modello predittivo della liquefazione sismica dei terreni basato sulla regressione logistica di cui verranno presentati i risultati ottenuti in Europa.

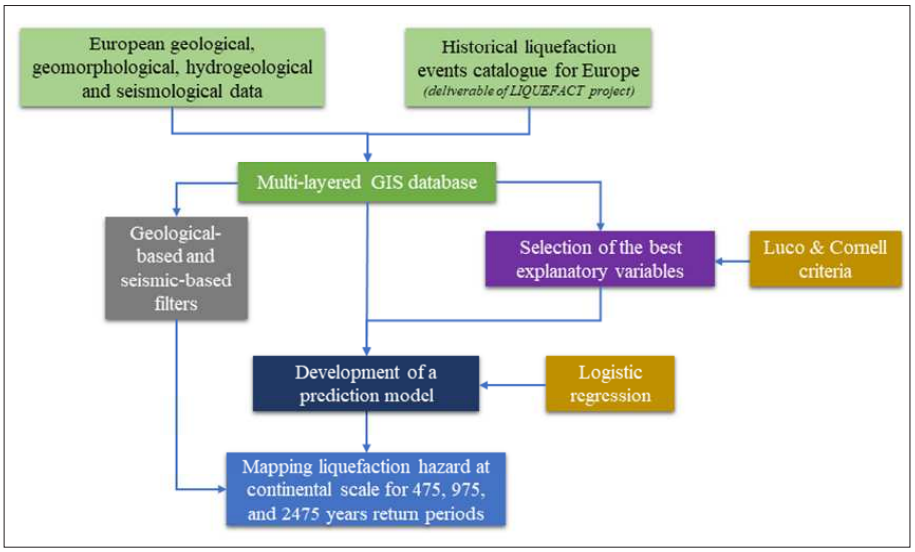


Fig. 11. Diagramma di flusso della metodologia sviluppata per la mappatura del rischio liquefazione sismica a scala continentale basata sulla regressione logistica (*fonte*: Bozzoni *et al.*, 2021b).

La Fig. 11 illustra la metodologia attraverso un diagramma di flusso.

Come precedentemente accennato, è stata dapprima creata una piattaforma cartografica georeferenziata GIS in cui sono stati integrati ed armonizzati i dati disponibili a scala continentale e in forma digitale relativamente alla geologia del quaternario, alla geomorfologia, all'idrogeologia, ai modelli digitali del terreno, alla litologia superficiale e riguardanti la pericolosità sismica del territorio europeo. Inoltre, è stato utilizzato il catalogo ECLiq citato all'inizio di questa sezione sulle manifestazioni storiche documentate di liquefazione sismica verificatesi in Europa negli ultimi 900 anni circa (Fig. 10).

La risoluzione adottata per le carte digitali è stata pari a 900 m x 900 m che corrisponde al livello di discretizzazione dei dati geospaziali messi a disposizione dalle agenzie dei paesi europei. I dati probabilistici sulla pericolosità sismica del continente europeo sono stati desunti dai prodotti del progetto europeo SHARE (http://portal.share-eu.org/).

Un aspetto cruciale del metodo è la scelta delle variabili esplicative ottimali che, in un determinato punto del territorio europeo, sono considerate essere maggiormente correlate con il verificarsi oppure non-verificarsi della liquefazione sismica. A questo fine è stato adottato l'approccio di Luco e Cornell (2007) il quale è stato originariamente sviluppato per applicazioni di ingegneria sismica strutturale. Esso si basa sul soddisfacimento dei criteri di

praticità, efficienza e competenza nella verifica del grado di correlazione tra la variabile esplicativa prescelta e le condizioni di innesco della liquefazione. L'approccio di Luco e Cornell (2007) è stato applicato ad un archivio di dati costruito a partire dalle occorrenze/non occorrenze di liquefazione verificatesi in Europa in quattro recenti terremoti:

- Parma, 23 Dicembre 2008, magnitudo M_W 5.2. Questo sisma non ha dato origine ad alcun caso di liquefazione dei terreni.
- L'Aquila, 6 Aprile 2009, magnitudo M_W 6.3. Questo sisma ha causato pochi casi di liquefazione dei terreni.
- Emilia, 20 Maggio 2012, magnitudo M_W 6.1. Questo sisma ha causato numerosi casi di liquefazione dei terreni.
- Cefalonia (Grecia), 26 Gennaio 2014, magnitudo M_W 6.1. Questo sisma ha causato un numero moderato di casi di liquefazione dei terreni.

Il modello predittivo della liquefazione sismica in Europa basato sulla regressione logistica è stato costruito a partire dall'archivio di dati riguardanti i quattro terremoti sopra citati (ad es. carte geo-tematiche, mappe di intensità dello scuotimento del suolo, distanza epicentrale, tipologia di terreno, etichettatura binaria in area epicentrale per occorrenza/non occorrenza della liquefazione, tipologia di manifestazione del fenomeno liquefazione). Tale archivio di dati è stato anche funzionale alla identificazione delle variabili esplicative geospaziali maggiormente correlate con i casi di liquefazione utilizzando il metodo di Luco e Cornell (2007). Esse sono risultate essere le seguenti:

- PGA_m
- CTI
- V_{S30}

Il parametro PGA_m (*Peak Ground Acceleration*) rappresenta il picco di accelerazione della componente orizzontale del moto del suolo ad un sito di determinate coordinate geografiche riferito ad uno dei tre periodi di ritorno considerati nello studio (475, 975 e 2.475 anni) e scalato di un fattore dipendente dalla magnitudo attesa. La magnitudo è infatti correlata alla durata dello scuotimento e questa, a parità di altre condizioni, influenza in modo importante il verificarsi o meno della liquefazione di un terreno suscettibile.

Il parametro CTI (*Compound Topographic Index*) è desunto dal modello digitale del terreno ed è correlato alla pendenza topografica del sito, la quale è assunta al ruolo di indicatore del grado di saturazione dei terreni (Zhu *et al.*, 2015). Nelle aree pianeggianti il valore del parametro CTI aumenta e con esso la suscettibilità alla liquefazione sismo-indotta di questi materiali.

Infine, il parametro V_{S30} rappresenta la media pesata nei primi 30 m dal piano campagna della velocità di propagazione delle onde elastiche trasversali ed è correlata alla deformabilità degli strati più superficiali di terreno. L'esperienza infatti ha mostrato che i suoli granulari più deformabili sono più suscettibili alla liquefazione perché generalmente meno addensati. Il modello di V_{S30} nel continente europeo è stato fornito dall'ente federale statunitense US Geological Survey (https://earthquake.usgs.gov/data/vs30/).

Le variabili esplicative ottimali PGA_m, CTI e V_{S30} sono state utilizzate nella definizione del modello predittivo della liquefazione sismica basato sulla regressione logistica (Fig. 11). Questo algoritmo è adeguato ad analizzare un insieme di dati in cui diverse variabili indipendenti determinano un risultato binario. In questo caso il risultato è rappresentato da un'etichetta di accadimento/non-accadimento liquefazione: "1" indica "accadimento liquefazione", "0" indica "non-accadimento liquefazione".

I coefficienti della regressione logistica sono stati determinati attraverso una procedura di calibrazione applicata all'insieme di dati geospaziali relativi ai quattro terremoti avvenuti in Europa tra il 2008 e il 2014 sopra citati. L'archivio di dati è stato suddiviso in due sottogruppi: il primo, costituito dal 75% dell'insieme, è stato utilizzato nella fase di adattamento del modello ai dati minimizzandone lo scarto (addestramento). Il secondo sottogruppo rappresentato dal 25% dell'archivio è servito a collaudare la capacità predittiva del modello (validazione). Poiché esiste un forte sbilanciamento nelle classi di dati perché il numero di celle con etichetta "0" è significativamente superiore al numero di celle con etichetta "1", la classe con etichetta "0" è stata ricampionata utilizzando alternativamente due algoritmi di sotto-campionamento (Fernández *et al.*, 2018): SMOTE (*Synthetic Minority Over-sampling TEchnique*, Chawla *et al.* 2002) e ADASYN (*ADAptive SYNthetic*, He *et al.* 2008).

Le prestazioni di questi algoritmi sono state valutate attraverso una serie di analisi con il metodo ROC (*Receiver Operating Characteristics*), una procedura grafica per valutare le capacità diagnostiche di un sistema di classificazione binario (Fawcett, 2005; Maurer *et al.* 2019). Da queste analisi comparative ADASYN è risultato essere l'algoritmo migliore.

La carta mostrata in Fig. 12 illustra la probabilità di liquefazione sismica in Italia e nella regione Balcanica per il periodo di ritorno di 475 anni. Essa è stata costruita applicando dei filtri basati sia sulla geologia superficiale al fine di escludere aprioristicamente dal calcolo i geomateriali non suscettibili di liquefazione (ad es. le rocce affioranti), sia sull'aver imposto una soglia minima di severità dello scuotimento sismico affinché il fenomeno della liquefazione sia fisicamente innescabile. Nello specifico l'analisi è stata

condotta con riferimento ai territori in cui il picco atteso della componente orizzontale di accelerazione supera il valore soglia di 0,10*g* dove *g* è l'accelerazione di gravità (9,80665 m/s^2). Tale valore è stato definito sulla base delle prescrizioni normative vigenti (ad es. NTC-2018) sostanziato dalla letteratura tecnica più aggiornata (ad es. Green e Bommer, 2019).

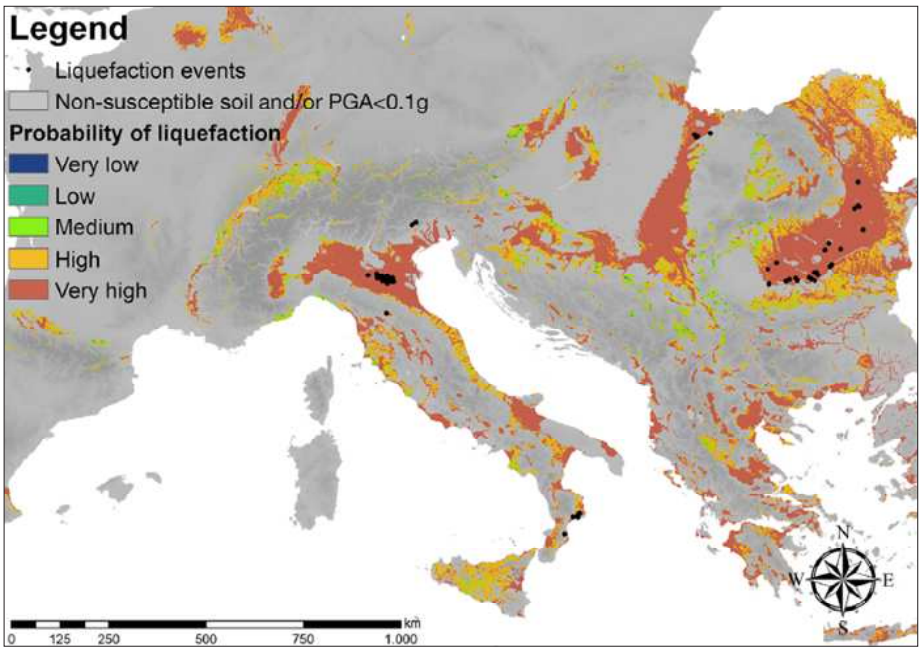


Fig. 12. Carta probabilistica del rischio liquefazione in Italia e nella regione Balcanica riferita al periodo di ritorno di 475 anni. Il colore grigio denota aree geologicamente non suscettibili e/o caratterizzate da bassa pericolosità sismica (accelerazione attesa inferiore a 1 m/s^2). I pallini neri indicano i siti in cui sono stati storicamente osservati e documentati fenomeni di liquefazione sismica (*fonte*: Bozzoni *et al.*, 2021b).

Nella carta mostrata in Fig. 12 sono state sovrapposte le manifestazioni dei casi storici e documentati di liquefazione associati al periodo di ritorno di 475 anni desunte dal catalogo ECLiq (Bozzoni *et al.* 2021a). Una buona capacità predittiva della mappa è indicata dal fatto che tali casi si collocano prevalentemente all'interno delle zone di colore marrone cioè quelle in cui, secondo il modello predittivo, è indicato il verificarsi della liquefazione sismica dei terreni con probabilità elevata. È importante sottolineare che i dati del catalogo storico delle manifestazioni di liquefazione sono indipendenti da quelli utilizzati per definire il modello predittivo.

La Fig. 13 mostra invece la carta la megazonazione del territorio europeo per il rischio liquefazione sismica con riferimento al periodo di ritorno di 475 anni. Questa volta la scala cromatica è binaria e cioè in ogni cella della mappa digitale può verificarsi uno solo di due possibili esiti: occorrenza oppure non occorrenza della liquefazione, avendo preventivamente stabilito la soglia di probabilità che separa questi esiti.

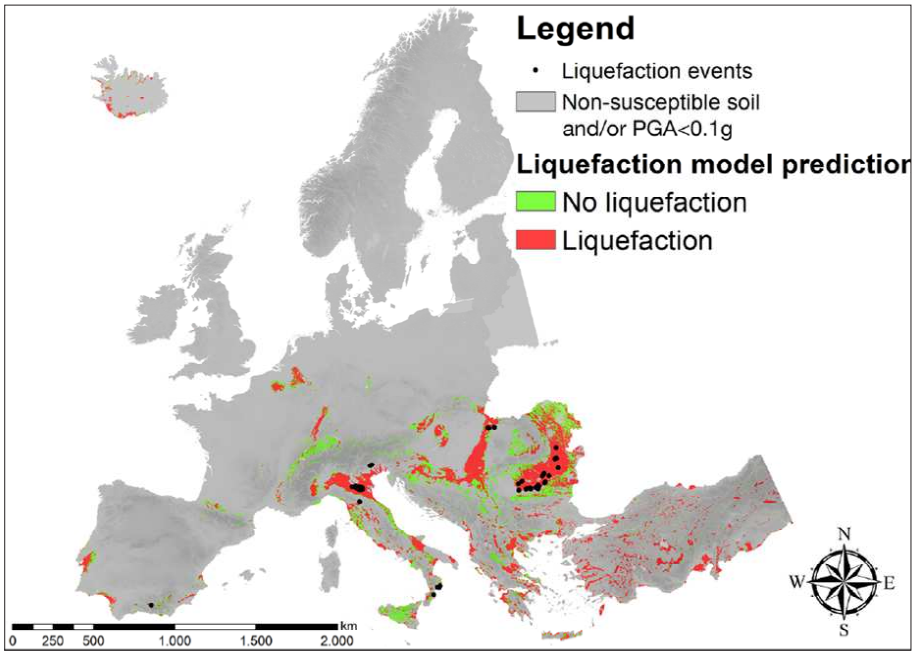


Fig. 13. Carta probabilistica binaria del rischio liquefazione in Europa riferita al periodo di ritorno di 475 anni. Il colore grigio denota aree geologicamente non suscettibili e/o caratterizzate da bassa pericolosità sismica (accelerazione attesa inferiore a 1 m/s^2). I pallini neri indicano i siti in cui sono stati storicamente osservati e documentati fenomeni di liquefazione sismica (*fonte*: Bozzoni *et al.*, 2021b).

Anche per la redazione della carta di Fig. 13 sono stati applicati i filtri sulla geologia superficiale e la soglia minima di intensità dello scuotimento sismico atteso. I Paesi che appaiono più a rischio oltre all'Italia e alla regione balcanica sono la Turchia, alcune zone della Spagna, del Portogallo e dei Paesi Bassi. I pallini neri indicano i dati del catalogo ECLiq che riportano i siti in cui sono stati storicamente osservati e documentati fenomeni di liquefazione sismica.

6. Microzonazione del rischio liquefazione di un centro abitato

Per microzonazione sismica di un territorio si intende la suddivisione di quel territorio, tipicamente a scala municipale o sub-municipale, in aree caratterizzate da un comportamento sismico omogeneo sotto il profilo della:

- intensità dello scuotimento del suolo (pericolosità sismica);
- intensità dei fenomeni co-sismici indotti sul territorio dal sisma. Tra essi sono di particolare rilevanza l'instabilità dei versanti naturali e la liquefazione del suolo.

Gli studi di microzonazione sismica sono di fondamentale importanza nella pianificazione dell'uso del territorio al fine di orientare la scelta di aree per nuovi insediamenti, definire gli interventi urbanistici ammissibili in una data area, programmare le indagini e i livelli di approfondimento per la realizzazione di nuove costruzioni e infrastrutture, stabilire orientamenti, modalità e priorità di intervento nelle aree urbanizzate, redigere piani per l'emergenza individuando edifici e aree che garantiscono le funzioni strategiche per l'operatività post-sismica. La microzonazione sismica, infatti, individua e caratterizza (Lai *et al.*, 2021):

- le zone in cui il moto sismico non viene modificato rispetto a quello atteso in condizioni geologiche e topografiche *standard* che sono quelle relative a roccia affiorante e superficie topografica orizzontale e pertanto gli scuotimenti sismici attesi sono equivalenti a quelli forniti dagli studi della pericolosità sismica di base;
- le zone in cui il moto sismico viene modificato a causa delle caratteristiche geomorfologiche e lito-stratigrafiche del territorio;
- le zone in cui sono attese manifestazioni di fenomeni di deformazione permanente del terreno innescati dal sisma. Tra questi, oltre alla instabilità di versante, alla fagliazione superficiale, al collasso di cavità e ai cedimenti per densificazione di depositi asciutti poco addensati, si annovera il fenomeno della liquefazione dei terreni granulari sotto falda.

Il manuale redatto dal Comitato Tecnico per l'Ingegneria Geotecnica Sismica (TC4) della *International Society for Soil Mechanics and Geotechnical Engineering* (ISSMGE, 1999) suggerisce che la zonazione di un territorio per la pericolosità sismica e i rischi di natura geotecnico-sismica sia condotta con riferimento a *tre* possibili livelli di risoluzione spaziale e quindi di accuratezza. Anche le linee guida per la microzonazione sismica di un territorio redatte in campo nazionale ed internazionale tendono a seguire lo stesso approccio. Per l'Italia si citano le linee guida redatte dal Dipartimento della Protezione Civile (ICMS, 2008; ICMS-LIQ, 2017) mentre a livello internazionale, validi

riferimenti sono le linee guida neozelandesi (NZGS [2016], quelle Californiane (CGS, 2008) ed il manuale per la microzonazione sismica indiano (SMM-India, 2011). Una rassegna aggiornata delle principali linee guida internazionali sulla microzonazione sismica può trovarsi in Vessia *et al.* (2021).

Con specifico riferimento alla microzonazione del rischio liquefazione sismica, a partire da un *livello I* caratterizzato da una valutazione preliminare e qualitativa basata sull'individuazione di evidenze storiche e fattori predisponenti di natura geologica, geomorfologica e idrogeologica, si procede progressivamente a valutazioni quantitative della suscettibilità alla liquefazione dei depositi di terreno basate sull'utilizzo di risultati di indagini geotecniche e geofisiche in sito e di laboratorio.

Il metodo ideale per stimare la resistenza del terreno alla liquefazione consiste nel prelevare campioni indisturbati di terreno e di sottoporli a prove cicliche di laboratorio. Tuttavia, il campionamento indisturbato nei terreni a grana-grossa è un'operazione complessa e onerosa. Esso può essere effettuato mediante il ricorso a sofisticate tecniche di congelamento oppure, ma solo in sabbie limose, attraverso tecniche emergenti ma ancora in fase di sperimentazione come il *gel-push sampling* (Stringer *et al.*, 2016). Il ricorso a tali tecniche è quindi giustificabile in poche situazioni come quelle associate a progetti di grande rilevanza. In Italia per esempio, è stato fatto per valutare il rischio di liquefazione dei depositi granulari interessati dal possibile attraversamento dello Stretto di Messina mediante un ponte sospeso ad un'unica campata.

Per le finalità della microzonazione sismica di *livello III*, la valutazione della suscettibilità alla liquefazione sismica è tipicamente condotta mediante un approccio semplificato basato sull'uso di correlazioni empiriche o semi-empiriche, denominate *correlazioni di campagna*. Mediante tali approcci la resistenza alla liquefazione di un terreno viene stimata a partire dalla resistenza penetrometrica desunta sperimentalmente attraverso i risultati di prove penetrometriche in sito SPT (*Standard Penetration Test*) oppure CPT (*Cone Penetration Test*). Alternativamente, essa può essere stimata dalla conoscenza della velocità di propagazione delle onde sismiche trasversali V_S misurata mediante metodi geofisici.

Gli approcci per la stima della resistenza alla liquefazione basati sulle correlazioni empiriche sono molto utilizzati (almeno per profondità inferiori a 20 m dal piano campagna) tanto da rappresentare un approccio standard ben consolidato anche a livello internazionale (ad es. NASEM, 2016). Tuttavia, benché la stima della resistenza alla liquefazione possa essere condotta utilizzando risultati di prove in sito di diversa tipologia, il grado di affidabilità di queste prove non è omogeneo. Nella letteratura scientifica più recente viene asserito infatti (vedi ad es. Boulanger e Idriss, 2014; NASEM, 2016; Facciorusso *et al.*, 2017) che tra

i metodi semplificati di stima del potenziale di liquefazione è da preferire quello basato sull'interpretazione dei risultati di prove CPT elettriche.

Con queste precisazioni, i metodi basati sull'uso delle correlazioni di campagna possono essere applicati seguendo due approcci (Lai *et al.*, 2018):

- *metodo deterministico* in cui la predizione di possibile accadimento della liquefazione viene stabilita attraverso l'introduzione di un fattore di sicurezza calcolato, ad una data profondità, come rapporto tra resistenza alla liquefazione ed intensità dello sforzo di taglio sismico atteso;
- *metodo probabilistico* rispetto al quale il rischio liquefazione di un terreno ad una data profondità è valutato calcolando la probabilità di accadimento associata ad una prefissata intensità dell'azione sismica.

La resistenza del terreno alla liquefazione ad una certa profondità è definita attraverso un parametro denominato rapporto di resistenza ciclica (CRR, in inglese *Cyclic Resistance Ratio*) che, nelle correlazioni di campagna, è funzione di un indice penetrometrico misurato a quella profondità a partire dai risultati di prove in sito opportunamente corretti e normalizzati. Tale rapporto di resistenza ciclica (CRR) viene confrontato con il rapporto di sforzo ciclico (CSR, in inglese *Cyclic Stress Ratio*) che rappresenta una misura della severità dell'azione sismica attesa a quella profondità. Eseguendo il calcolo dei parametri CRR e CSR a diverse profondità è possibile tracciare una curva limite che discrimina le situazioni in cui è attesa liquefazione da quelle in cui l'accadimento del fenomeno è ritenuto improbabile. La curva limite è definita in modo empirico sulla base di evidenze storiche di liquefazione riscontrate e documentate in terremoti del passato avvenuti in siti ben caratterizzati dal punto di vista geotecnico. Per dati penetrometrici CPT ed SPT le raccomandazioni NZGS (2016) e il rapporto NASEM (2016) fanno riferimento alle correlazioni empiriche illustrate nella monografia di Idriss e Boulanger (2014).

L'approccio delle correlazioni empiriche consente una stima del rischio di liquefazione ad una data profondità dal piano campagna. A questa valutazione puntuale, viene associata una stima globale dell'incidenza del fenomeno lungo una verticale e delle sue conseguenze, fornita ad esempio, dall'indice del *potenziale di liquefazione* LPI (*Liquefaction Potential Index*), introdotto originariamente da Iwasaki *et al.* (1978). Aggiornamenti su definizioni alternative a questo parametro sono illustrati nel lavoro di Maurer *et al.* (2015). L'indice del potenziale di liquefazione LPI conserva tuttavia la sua utilità e può essere efficacemente impiegato per effettuare studi di microzonazione di un territorio, come illustrato anche nella letteratura scientifica più recente (e.g. Cramer *et al.*, 2017). Le linee guida italiane (ICMS; 2008; ICMS-LIQ, 2017) e quelle della Regione Emilia-Romagna (ISMS-RER, 2015) suggeriscono di

impiegare l'indice LPI nella formulazione di Sonmez (2003). Come ulteriore indice globale del rischio di liquefazione è stato recentemente introdotto il *Liquefaction Severity Number* (LSN; Tonkin and Taylor, 2013; Van Ballegooy *et al.*, 2014), messo a punto a seguito dei numerosi fenomeni di liquefazione avvenuti nella regione di Canterbury in Nuova Zelanda durante la sequenza sismica 2010-2011. Le raccomandazioni NZGS (2016) oltre all'utilizzo di LPI suggeriscono l'utilizzo del parametro LSN.

Altri indici del potenziale di liquefazione sono il *Liquefaction Severity Index* (LSI, Yilmaz, 2004) ed il *Lateral Displacement Index* (LDI, Zhang *et al.*, 2004), che si prefigge lo scopo di predire l'entità dello spostamento laterale in un piano di campagna in lieve pendenza a partire dai risultati di prove in sito penetrometriche CPT.

I limiti dei metodi empirici o semi-empirici per la valutazione del rischio di liquefazione di un terreno sono ampiamente discussi nella letteratura scientifica. Si menziona, in particolare, il lavoro di Cubrinovski *et al.* (2017) che, con riferimento a decine di siti a Christchurch (Nuova Zelanda) in cui si sono verificati fenomeni di liquefazione nella sequenza 2010-2011, presenta un confronto tra le predizioni ottenute mediante gli approcci semplificati ed i risultati di analisi dinamiche in sforzi efficaci condotte utilizzando per il terreno legami costitutivi avanzati (e.g. Cubrinovski e Ishihara, 1998). Da questi studi comparativi emerge che i metodi semplificati basati sulle correlazioni di campagna forniscono generalmente risultati abbastanza affidabili seppure con qualche eccezione.

Caso di studio: microzonazione del territorio comunale di Cavezzo (MO)

Il territorio comunale di Cavezzo in provincia di Modena è stato prescelto nel progetto europeo LiquefACT come uno dei quattro centri urbani in cui effettuare lo studio di microzonazione sismica per il rischio di liquefazione sismica dei terreni. A seguito della sequenza sismica che nel maggio-giugno 2012 ha interessato la Pianura Padana centrale, nel comune di Cavezzo si sono verificati danni associabili ad una intensità macrosismica nella scala EMS pari a VIII (Locati *et al.*, 2016). Inoltre, nel settore orientale del territorio comunale, dopo la scossa del 29 maggio 2012 (M_W 5.9), sono state osservate diffuse evidenze di liquefazione dei terreni. Lo studio condotto a Cavezzo si è articolato nelle seguenti fasi (Lai *et al.*, 2021):

- Inquadramento geologico, geomorfologico e idrogeologico
  - Contesto sismotettonico
  - Contesto geologico
  - Geomorfologia del territorio di Cavezzo
  - Soggiacenza falda freatica nel territorio di Cavezzo

- Campagne sperimentali geotecniche e geofisiche in sito e di laboratorio
- Definizione del modello geotecnico e sismo-stratigrafico del sottosuolo
  - Costruzione di un modello geofisico pseudo-tridimensionale
  - Litostratigrafia dei depositi di terreno superficiali
  - Definizione del modello geotecnico-sismico
- Definizione dei segnali accelerometrici in ingresso
- Analisi di risposta sismica locale con approccio pseudo-stocastico
- Calcolo delle carte del rischio di liquefazione sismica e confronto con le manifestazioni dei fenomeni di instabilità del sottosuolo avvenuti nella sequenza sismica del 2012.

Lo studio ha beneficiato anche dei contributi di cui all'art. 11 L. 77/2009, resi disponibili con ordinanza del Capo Dipartimento Protezione Civile n. 293/2015. Tutti gli elaborati cartografici dello studio e la relazione illustrativa sono disponibili nel sito della Regione Emilia-Romagna al link https://geo.regione.emilia-romagna.it.

Per la caratterizzazione del sottosuolo riguardante il territorio comunale, oltre alla raccolta di informazioni geologiche e geomorfologiche, sono stati utilizzati dati geotecnici e geofisici derivanti sia dalle campagne di indagini pregresse, sia da prove specificatamente eseguite nell'ambito del progetto LiquefACT.

La base di partenza era rappresentata dalle indagini pregresse eseguite nel territorio comunale e fornite dal Servizio Geologico Sismico e dei Suoli della Regione Emilia-Romagna. La Fig. 14 mostra i dati geotecnici e geofisici preesistenti sul territorio di Cavezzo prima dell'avvio dello studio di microzonazione sismica associato al progetto LiquefACT.

Dalla disamina della quantità e qualità dei dati disponibili, sono state pianificate ed eseguite quattro campagne di indagini in sito di tipo geotecnico (ad es. prove penetrometriche CPT), geofisico (ad es. prospezione sismica a riflessione ad alta risoluzione) e prove di laboratorio (ad es. prove di colonna risonante). La Fig. 15 illustra le prove geofisiche integrative eseguite sul territorio del comune di Cavezzo durante lo studio di microzonazione sismica.

Un dato essenziale per valutare la variabilità spaziale dello scuotimento sismico atteso nel territorio comunale è lo spessore dei sedimenti. La Fig. 16 mostra la carta della profondità del tetto del substrato (sismico) nella Pianura Padana (Mascandola *et al.*, 2019). Per vincolare al meglio l'andamento plano-altimetrico del substrato al dato regionale e per determinare le proprietà geofisiche degli strati più profondi, a Cavezzo sono state condotte dall'Istituto

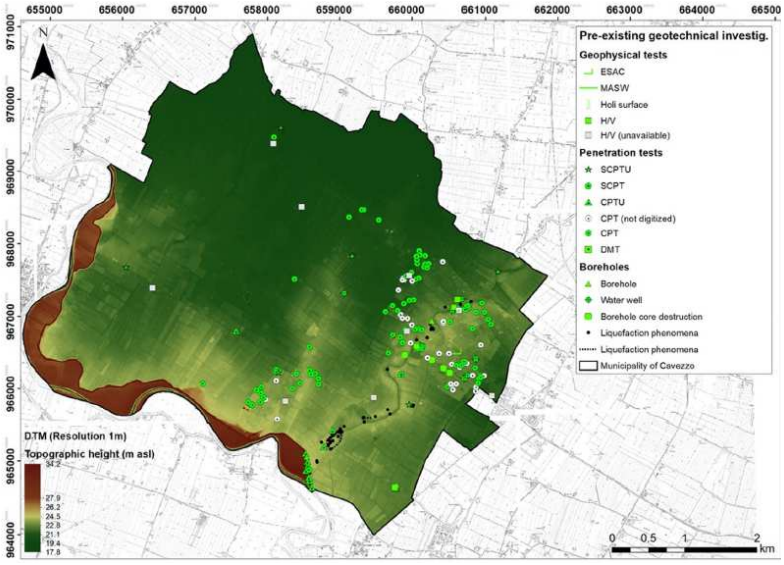


Fig. 14. Dati geotecnici e geofisici preesistenti sul territorio di Cavezzo prima dell'avvio dello studio di microzonazione sismica. I pallini neri indicano evidenze di liquefazione verificatesi nella sequenza maggio-giugno 2012 (*fonte*: Lai *et al.*, 2020).

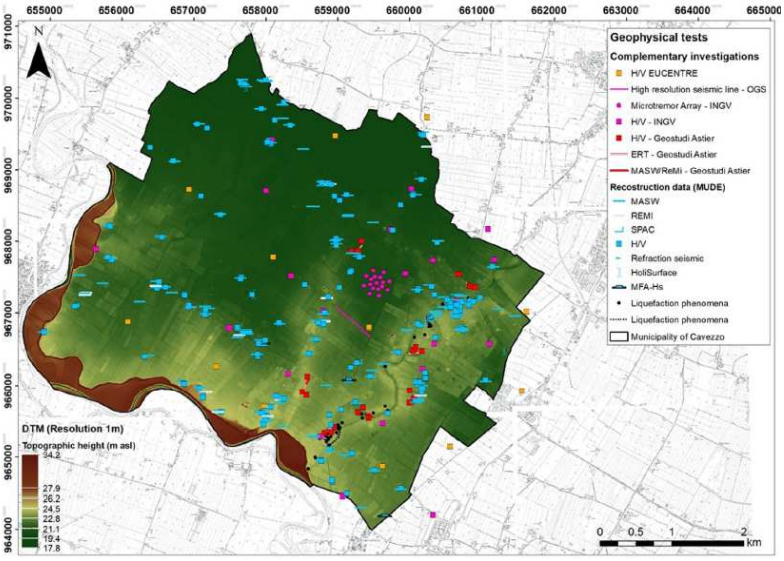


Fig. 15. Indagini geofisiche integrative eseguite sul territorio di Cavezzo durante lo studio di microzonazione sismica. I pallini neri indicano evidenze di liquefazione verificatesi nella sequenza maggio-giugno 2012 (*fonte*: Lai *et al.*, 2020).

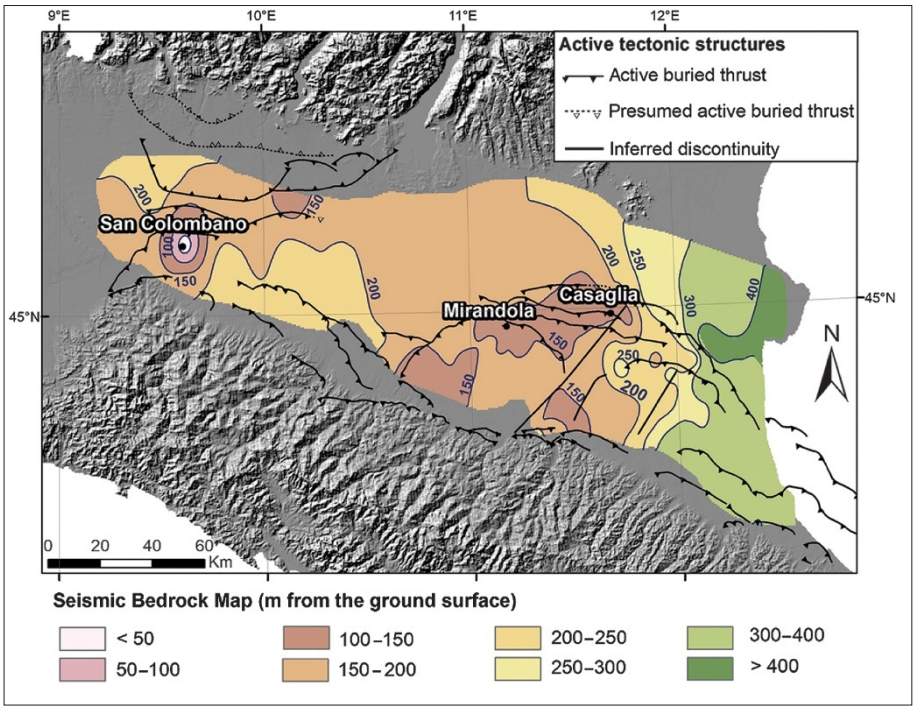


Fig. 16. Mappa della profondità del tetto del substrato roccioso sismico nella Pianura Padana (in metri dalla superficie libera del piano campagna). Nell'area di studio i depositi alluvionali hanno spessori variabili da 130 m (zona a Nord di Cavezzo) a 280 m (zona a Sud di Cavezzo) (*fonte*: Mascandola *et al.*, 2019).

Nazionale di Geofisica e Vulcanologia (INGV, Sezione di Milano) acquisizioni di rumore ambientale sia in stendimenti bidimensionali di sismometri che a stazione singola, e prospezione sismica attiva a riflessione ad alta risoluzione. Quest'ultima è stata eseguita dall'Istituto Nazionale di Oceanografia e Geofisica Sperimentale di Trieste.

Le indagini sperimentali hanno anche incluso prove di laboratorio su campioni di terreno prelevati adottando la sofisticata tecnica del *gel-push* (Stringer *et al.*, 2016). È stata infine condotta una campagna di monitoraggio della soggiacenza della falda freatica in diverse località del territorio di Cavezzo, data l'importanza di questo parametro nella valutazione del potenziale di liquefazione.

Per rendere i dati ottenuti dalle prove sperimentali pienamente fruibili nelle successive fasi dello studio, è stato realizzato per Cavezzo un archivio digitale su base cartografica georeferenziata GIS. Esso include i risultati sperimentali di 1.027 prove.

Al fine di valutare la variabilità spaziale dello scuotimento sismico all'interno del territorio comunale è stato necessario condurre analisi di risposta sismica locale. Esse hanno richiesto la definizione di un modello sismo-stratigrafico che descriva l'andamento con la profondità dal piano campagna della velocità di propagazione delle onde sismiche. Tale modello deve essere sufficientemente accurato da rivelare variazioni significative dello scuotimento sismico nell'area di interesse perché esse influenzano la variabilità spaziale del rischio liquefazione. A questo scopo è stato realizzato un modello geofisico pseudo-tridimensionale (P3D) consistente nell'unione di profili verticali (monodimensionali) della velocità di propagazione delle onde sismiche trasversali sui nodi di una griglia equi-spaziata dei siti d'indagine.

I modelli P3D possono essere utilizzati efficacemente in situazioni dove si possa assumere una debole eterogeneità laterale alla scala di un territorio comunale e, quindi, si possano escludere nel campo delle frequenze di interesse ingegneristico fenomeni di focalizzazione del campo d'onda, risonanza geometrica di bacino ed effetti topografici.

Per definire la litostratigrafia dei primi 20-30 m di sottosuolo, è stata condotta un'analisi congiunta delle informazioni stratigrafiche, litologiche e geomorfologiche sulla base della quale il territorio del comune di Cavezzo è stato suddiviso in aree omogenee. Particolare attenzione è stata rivolta al riconoscimento della presenza e dello spessore cumulato dei livelli sabbiosi nei primi metri di sottosuolo. Confrontando le stratigrafie dei sondaggi, dei pozzi e le ricostruzioni stratigrafiche ottenute dall'interpretazione delle prove penetrometriche sono state riconosciute nove stratigrafie tipo, corrispondenti ad altrettanti modelli geologici superficiali tramite i quali è stato possibile suddividere il territorio di Cavezzo in aree omogenee per litologia e ambiente genetico-deposizionale. I depositi alluvionali a Cavezzo sono caratterizzati da terreni limoso-argillosi fini intercalati a strati ricchi di torba e intercalazioni di sabbie e sabbie limose. Questi sedimenti superficiali sono stati depositati dal fiume Secchia, affluente di destra del fiume Po, mentre gli strati sabbiosi più profondi sono stati depositati dal fiume Po (Castaldini, 1989). La Fig. 17 mostra la carta geomorfologica dell'area di studio. Essa è collocata nella piana alluvionale del fiume Secchia e comprende numerose unità geomorfologiche.

Allo scopo di definire il modello geotecnico-sismico da adottare nelle analisi di risposta sismica locale, i parametri del modello sismo-stratigrafico sono stati integrati con le informazioni di carattere litostratigrafico derivanti dalla geologia. La valutazione degli effetti di sito dovuti ad amplificazione lito-stratigrafica è stata effettuata utilizzando un modello costitutivo del

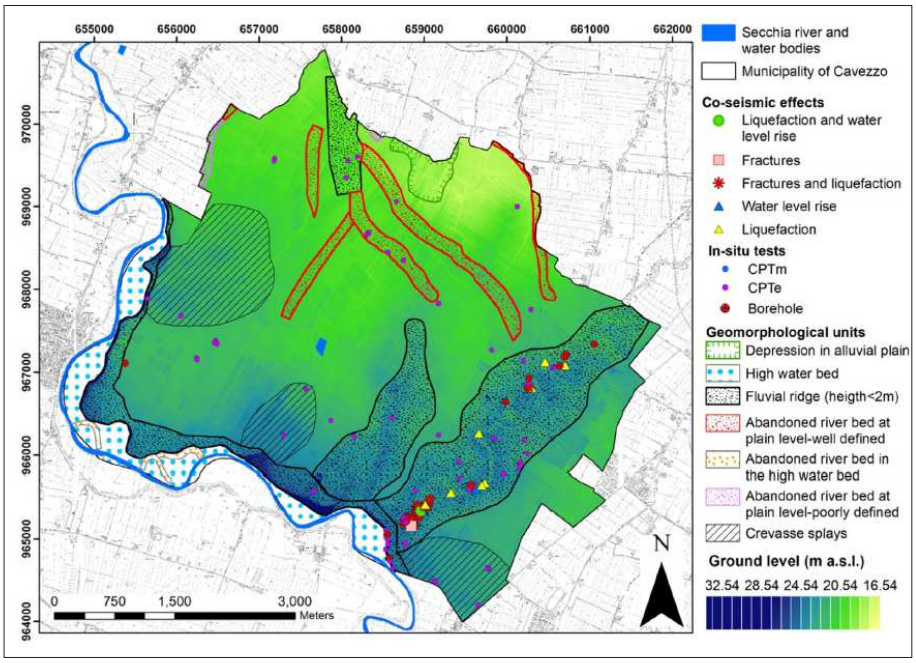


Fig. 17. Carta geomorfologica del territorio di Cavezzo. La scala cromatica della quota rispetto al livello del mare è stata derivata da un modello digitale del terreno avente una risoluzione spaziale di 1 m (*fonte*: modificata da Meisina *et al.*, 2019).

terreno del tipo viscoelastico lineare-equivalente. La pericolosità sismica di base è stata determinata per i tre periodi di ritorno considerati di 475, 975 e 2.475 anni in termini di spettri di risposta elastici in accelerazione per suolo rigido, magnitudo attese al sito ed accelerogrammi naturali sismo- e spettro-compatibili. La selezione dei segnali accelerometrici è stata effettuata utilizzando una versione aggiornata del programma ASCONA (Corigliano *et al.*, 2012). Per la definizione dei valori di magnitudo attesi al sito è stata condotta un'analisi ad hoc basata sul calcolo dei tassi di sismicità (Lai *et al.*, 2021).

Le analisi di risposta sismica locale monodimensionali sono state condotte utilizzando il codice di calcolo SHAKE91 (Schnabel *et al.*, 1972; Idriss e Sun, 1992). Complessivamente, sono state condotte, per ciascun periodo di ritorno, 229.768 analisi, avendo considerato 3.052 nodi della griglia, 11 modelli sismo-stratigrafici e geotecnici e 7 segnali accelerometrici naturali. La Fig. 18 mostra la mappa del picco di accelerazione della componente orizzontale (PGA) per il periodo di ritorno di 475 anni.

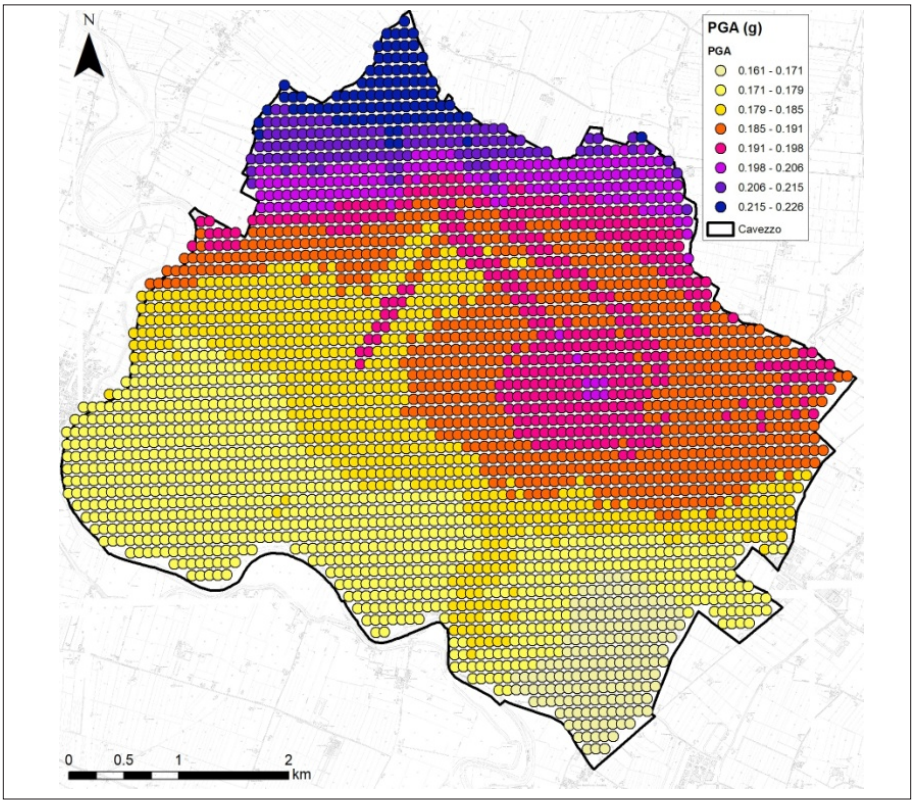


Fig. 18. Mappa del picco di accelerazione (PGA) della componente orizzontale del moto del suolo calcolata nel territorio di Cavezzo mediante analisi di risposta sismica locale per il periodo di ritorno di 475 anni (*fonte*: Lai *et al.*, 2021).

La Fig. 18 mostra che i valori più elevati del parametro PGA si registrano nella parte settentrionale del comune, in prossimità del culmine dell'anticlinale di Mirandola, dove il substrato sismico è meno profondo e gli effetti di risonanza sono significativi nei periodi dell'oscillatore di interesse ingegneristico (Lai *et al.*, 2020). Ai fini della validazione della mappa di Fig. 18 che è basata sugli esiti di analisi di risposta sismica locale monodimensionali, sono state condotte analisi bidimensionali con il codice di calcolo QUAD4M (Hudson *et al.*, 1994) per una sezione verticale che attraversa l'intero territorio comunale da nord a sud, che è la direzione lungo la quale si registrano le maggiori variabilità laterali del modello sismo-stratigrafico. I risultati ottenuti confermano che per le frequenze di interesse, gli effetti bidimensionali a Cavezzo sono trascurabili.

La Fig. 18 rappresenta la mappa di scuotimento attesa nel territorio di Cavezzo per il periodo di ritorno di 475 anni. Analoghe mappe sono state prodotte per i periodi di ritorno di 975 e 2.475 anni. Esse rappresentano il primo dato fondamentale per effettuare la microzonazione di Cavezzo di *livello III* e cioè per redigere carte probabilistiche del rischio di liquefazione sismica. L'altro dato è rappresentato dalla carta di suscettibilità dei terreni appartenenti a quel territorio. Essa è stata definita utilizzando i risultati di prove penetrometriche statiche CPT. Come precedentemente accennato infatti, la resistenza alla liquefazione di un terreno può essere stimata a partire dalla misura sperimentale della resistenza all'avanzamento, a velocità costante (pari a circa 2 cm/s) di un penetrometro a punta conica (prova CPT). La Fig. 19 mostra lo schema dell'attrezzatura utilizzata per l'esecuzione di questa prova geotecnica. Il protocollo tecnico di esecuzione della prova in Italia ma anche in campo internazionale è lo standard ASTM D5778 (2020).

Nel territorio comunale di Cavezzo sono stati utilizzati i dati ottenuti da 444 prove CPT di cui 375 eseguite con il penetrometro meccanico, 44 prove con il piezocono e 25 con il penetrometro sismico. Piezocono e penetrometro sismico sono varianti della prova CPT.

La resistenza a liquefazione è stata stimata a partire dai dati sperimentali CPT utilizzando cinque procedure indipendenti selezionate sulla base delle più recenti raccomandazioni della letteratura specialistica internazionale. In particolare sono stati utilizzati i metodi proposti da Robertson (2009), Boulanger e Idriss (2016), Moss *et al.* (2006), Jefferies e Been (2015) e Giretti e Fioravante (2017). È stato quindi adottato un approccio ad *albero logico* (Fig. 20) in modo da tenere conto dell'incertezza *epistemica* legata cioè al particolare modello adottato. Esso è caratterizzato da due rami principali: il primo ramo è riferito ai modelli empirici consolidati della letteratura tecnica e tra essi spicca quello di Boulanger e Idriss (2016) a cui è stato attribuito il peso maggiore in quanto secondo autorevoli riferimenti internazionali (ad es. NZGS 2016) esso è il più affidabile.

Il secondo ramo invece, fa riferimento a modelli empirici basati sulla interpretazione dei dati CPT in accordo alla teoria dello stato critico, un approccio geotecnico innovativo relativamente recente. In particolare, sono stati considerati due modelli: quello proposto da Jefferies e Been (2015) e la correlazione di Giretti e Fioravante (2017). A quest'ultima è stata attribuita una maggiore affidabilità poiché essa è stata sviluppata su dati provenienti da depositi di terreno in Emilia che hanno subito la liquefazione durante la sequenza del 2012.

L'albero logico mostrato in Fig. 20 è stato utilizzato come motore di un algoritmo appositamente sviluppato per eseguire simulazioni numeriche

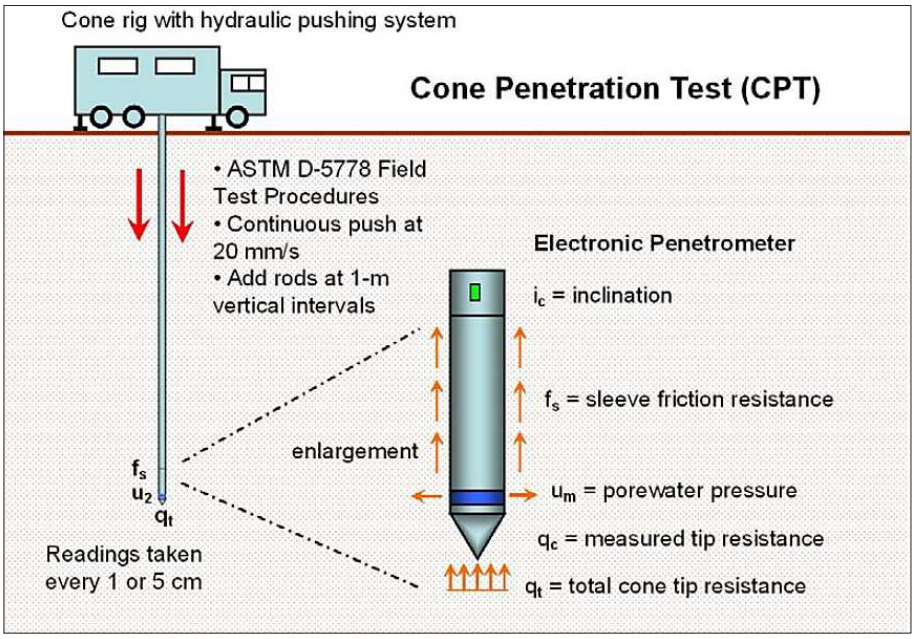


Fig. 19. Configurazione della prova penetrometrica CPT utilizzata per stimare sperimentalmente la resistenza alla liquefazione dei terreni (*fonte*: Mayne, 2007).

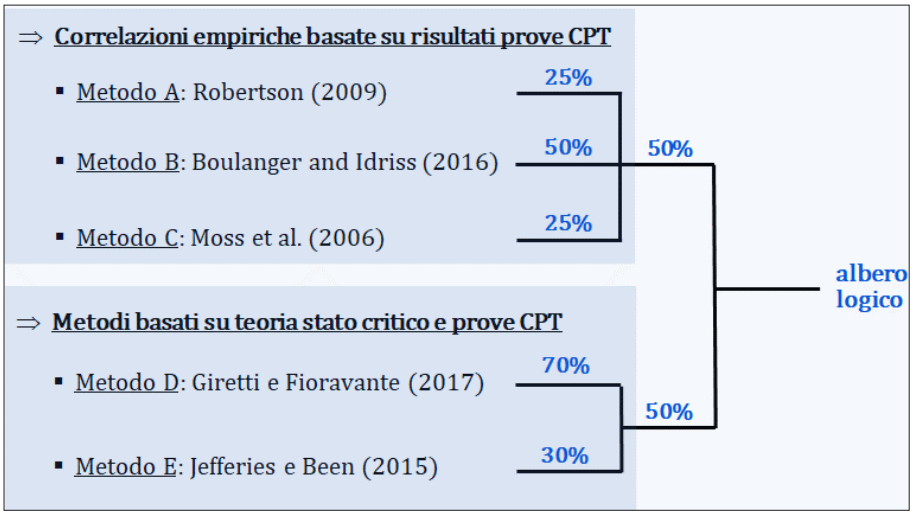


Fig. 20. Albero logico utilizzato per il calcolo del rischio di liquefazione sismica nel territorio di Cavezzo (MO) (*fonte*: Lai *et al.*, 2021).

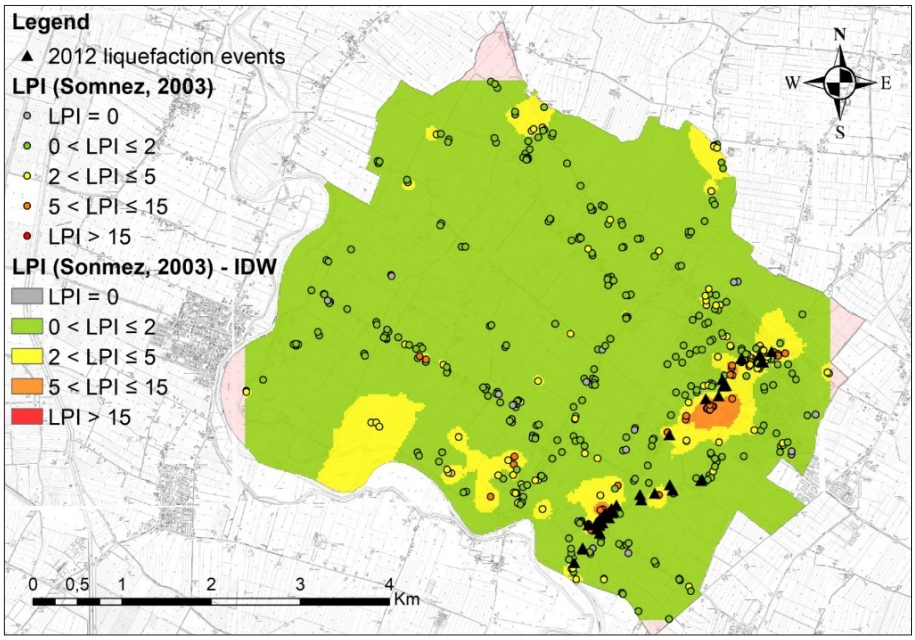


Fig. 21. Carta probabilistica del rischio liquefazione sismica nel comune di Cavezzo (MO) riferita al periodo di ritorno di 475 anni e calcolata mediante simulazioni Monte Carlo associate all'albero logico di Fig. 20. I triangoli neri indicano i siti in cui sono stati osservati e documentati fenomeni di liquefazione durante la sequenza sismica del 2012 (*fonte*: Lai *et al.*, 2021).

Monte Carlo al fine di valutare con un approccio probabilistico il rischio di liquefazione sismica in un territorio spazialmente esteso. L'azione sismica in ingresso e i parametri geotecnici più rilevanti sono stati trattati come variabili aleatorie le cui realizzazioni individuali, generate in modo casuale da apposite distribuzioni di probabilità, alimentano un modello deterministico che è iterativamente utilizzato per calcolare il rischio liquefazione fino alla completa stabilizzazione dei risultati. Ciò è avvenuto dopo aver eseguito circa 1000 simulazioni Monte Carlo (Lai *et al.*, 2021). L'approccio stocastico ha il pregio di tenere conto dell'incertezza associata ai parametri di ingresso del modello, la quale influenza in modo non trascurabile l'affidabilità dei risultati ottenuti.

La Fig. 21 mostra la mappa probabilistica del rischio liquefazione sismica nel territorio comunale di Cavezzo con riferimento al periodo di ritorno di 475 anni. Essa è stata calcolata mediante interpolazione spaziale dei valori medi del parametro LPI calcolati in corrispondenza dei nodi di una griglia mediante

le simulazioni Monte Carlo testé illustrate. Nella scala cromatica utilizzata per la redazione della carta, il colore arancione indica le aree caratterizzate da rischio liquefazione moderato. Tale predizione è suffragata dai rilievi di campagna effettuati nel territorio comunale di Cavezzo nella ricognizione post-sismica della sequenza di maggio-giugno 2012 che ha documentato evidenze di liquefazione dei terreni. In Fig. 21 esse sono state riportate con dei piccoli triangoli neri. Lai *et al.* (2019) hanno infatti mostrato che a tale sequenza può essere associato un periodo di ritorno di 500 anni.

In Fig. 22 è mostrata la mappa probabilistica dei cedimenti del terreno indotti nel territorio di Cavezzo dalla liquefazione sismica per il periodo di ritorno di 475 anni. Il calcolo è stato effettuato utilizzando il modello empirico di Zhang *et al.* (2002) che correla la resistenza alla liquefazione del terreno misurata sperimentalmente dai risultati di prove penetrometriche CPT all'abbassamento verticale del piano campagna conseguente alla liquefazione per una azione sismica di prefissata intensità. Il calcolo è stato effettuato utilizzando la stessa procedura stocastica adottata per la redazione della Fig. 21 e cioè associando le simulazioni Monte Carlo all'albero logico di Fig. 20.

I maggiori cedimenti del terreno, stimati essere dell'ordine dei 10-15 cm, sono predetti avvenire nelle zone che in Fig. 21 erano state indicate a rischio moderato di liquefazione. Anche nella Fig. 22 i piccoli triangoli neri denotano le evidenze di liquefazione osservate nella sequenza di maggio-giugno 2012.

Il confronto a Cavezzo tra le predizioni del rischio liquefazione sismica e le conseguenze in termini di cedimento, illustrate rispettivamente nelle Figg. 21 e 22, e le evidenze in terremoti recenti può ritenersi soddisfacente tuttavia è importante evidenziare i limiti dei modelli predittivi utilizzati. Il più significativo dei quali è l'aver adottato nelle analisi numeriche un *approccio disaccoppiato* e cioè che non tiene conto dell'influenza che la non-linearità del comportamento idro-meccanico dei terreni ha sulla intensità del moto sismico. Infatti, la mappa dello scuotimento sismico atteso mostrata in Fig. 18 è stata determinata avendo adottato un modello costitutivo del terreno del tipo monofase lineare-equivalente, il quale risulta inadeguato a riprodurre correttamente la risposta idro-meccanica dei mezzi porosi saturi. Questi ultimi infatti, sono materiali che in certe condizioni possono esibire comportamenti fortemente non-lineari fino all'instabilità perché potenzialmente liquefacibili. Per questa ragione le analisi di risposta sismica locale avrebbero più correttamente dovuto essere eseguite utilizzando modelli costitutivi più avanzati che operano in sforzi efficaci e tengono quindi conto dell'accoppiamento

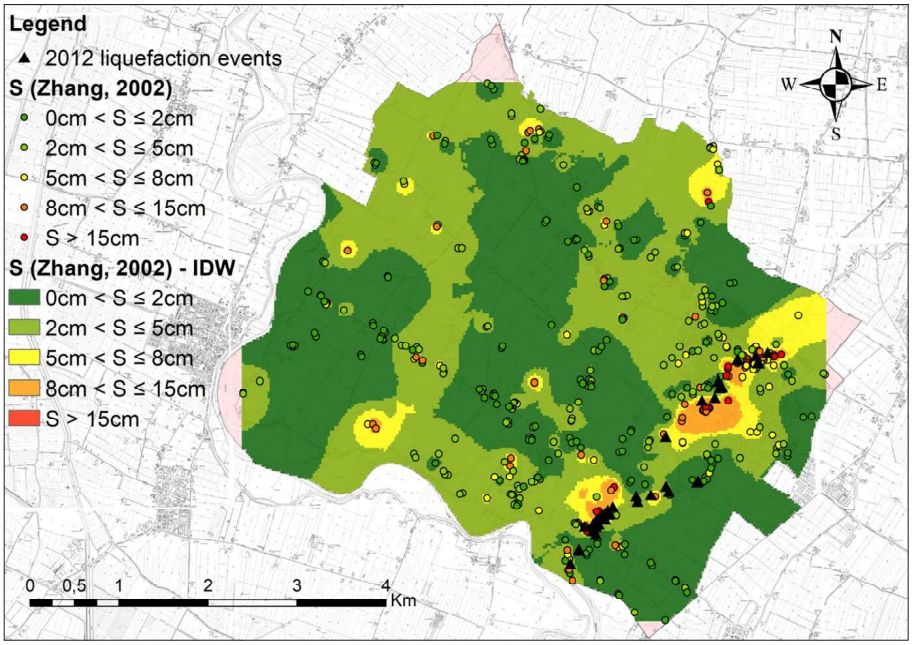


Fig. 22. Carta probabilistica dei cedimenti indotti dalla liquefazione sismica nel comune di Cavezzo (MO) riferita al periodo di ritorno di 475 anni e calcolata mediante simulazioni Monte Carlo associate all'albero logico di Fig. 20. I triangoli neri indicano i siti in cui sono stati osservati e documentati fenomeni di liquefazione durante la sequenza sismica del 2012 (*fonte*: Lai *et al.*, 2019).

idro-meccanico tra la fase fluida e quella solida del mezzo poroso. Essi sono in grado di simulare correttamente la progressiva perdita di resistenza dei terreni e del decadimento della loro rigidezza fino alla loro fluidificazione conseguente all'incremento delle pressioni interstiziali originato dall'azione sismica. Tuttavia, i modelli costitutivi avanzati risultano considerevolmente più complessi da trattare oltre ad essere più onerosi dal punto di vista computazionale. Infine, richiedono la definizione di un numero elevato di parametri costitutivi e quindi una caratterizzazione geotecnica significativamente più raffinata di quella mediamente disponibile sul territorio di Cavezzo. Malgrado ciò, a scopo di confronto e validazione dei risultati ottenuti, sono state eseguite a Cavezzo in un numero esiguo di profili verticali molto ben caratterizzati, analisi in sforzi efficaci utilizzando il modello costitutivo avanzato denominato PM4Sand (Boulanger e Ziotopolou, 2015). Nei siti prescelti per l'esecuzione di queste analisi sono state documentate evidenze di liquefazione durante la sequenza sismica emiliana del 2012. Pertanto, negli strati

liquefacibili sono stati calcolati mediante l'approccio numerico avanzato, i valori massimi del rapporto tra l'eccesso di pressione interstiziale sismo-indotto e la tensione verticale efficace. Tali valori sono quindi stati confrontati con l'andamento in funzione della profondità del fattore di sicurezza dal rischio liquefazione (definito dal rapporto tra la resistenza alla liquefazione, CRR, e l'intensità dello sforzo di taglio sismico, CSR). Infine, mediante le analisi avanzate sono state calcolate lungo due verticali, le deformazioni volumetriche post-sismiche degli strati liquefacibili e confrontate con quelle predette mediante l'approccio empirico delle analisi disaccoppiate (Lai *et al.*, 2019). Negli strati più superficiali, i risultati delle analisi numeriche avanzate hanno sostanzialmente confermato le predizioni dell'approccio disaccoppiato (Lai *et al.*, 2021). Benché il confronto sia stato effettuato in corrispondenza di un numero limitato di profili monodimensionali di terreno, l'esito è incoraggiante in quanto mostra che, almeno a Cavezzo, l'approccio disaccoppiato sembra fornire risultati accettabili se utilizzato per la microzonazione del rischio di liquefazione sismica a scala municipale.

Considerazioni conclusive

L'articolo ha trattato il tema della mappatura di un territorio per il rischio di liquefazione dei depositi granulari saturi causata dallo scuotimento sismico. La liquefazione sismica è un fenomeno locale di instabilità dei mezzi particellari conseguente all'incremento progressivo della pressione interstiziale che può produrre l'annullamento degli sforzi intergranulari e quindi della resistenza. Essa è causa nel mondo di ingenti danni economici anche in terremoti di moderata magnitudo come è avvenuto per esempio in Emilia nella sequenza sismica del maggio-giugno 2012.

Gli studi di zonazione della pericolosità sismica e dei fenomeni di instabilità del terreno possono essere condotti a diverse scale geografiche e sebbene la mappatura di un territorio per il rischio di liquefazione sismica possa apparire, a qualsiasi scala, come un ossimoro stante la natura marcatamente locale del fenomeno fisico, tali studi hanno una loro utilità nell'identificare territori potenzialmente a rischio. Tuttavia, non sorprende che a causa delle innumerevoli incertezze dei modelli predittivi e dei parametri in ingresso, le predizioni del rischio liquefazione sismica siano necessariamente di tipo probabilistico. Nonostante queste limitazioni, le carte di *mega* – (scala geografica continentale), *macro* – (scala nazionale) *meso* – (scala regionale) e *micro* – (scala urbana) zonazione di un territorio sono un utile strumento per la pianificazione di un territorio e per promuovere iniziative volte a finanziare studi di dettaglio

in aree che appaiono critiche, quindi, in ultima analisi, finalizzate alla mitigazione del rischio sismico.

Lo studio e l'approfondimento di queste tematiche da parte dell'autore dell'articolo è avvenuto nel corso del triennio 2016-2019 in virtù del suo ruolo di coordinatore scientifico del progetto europeo LiquefACT che, con uno stanziamento di 5 milioni di Euro, è il più grande progetto di ricerca mai finanziato dalla Commissione Europea sulla valutazione e mitigazione in Europa dei rischi associati alla liquefazione sismica dei terreni.

Nell'articolo è stata illustrata una sintesi dei principali risultati ottenuti in LiquefACT sul tema specifico della zonazione multi-scala del rischio liquefazione sismica dei terreni. In particolare, è stata descritta la metodologia utilizzata per la costruzione della carta probabilistica di megazonazione dell'Europa continentale per diversi periodi di ritorno e della mappa probabilistica di microzonazione del territorio comunale di Cavezzo, in provincia di Modena.

Benché la carta di megazonazione del territorio europeo sia caratterizzata da una bassa risoluzione spaziale, la disponibilità di una siffatta mappa può favorire iniziative di finanziamento di singoli Stati a progetti e studi di approfondimento nei territori a rischio di danni indotti dalla liquefazione sismica dei terreni.

Infine, le fasi di costruzione della mappa di microzonazione sismica del territorio comunale di Cavezzo, sebbene contraddistinte dalle peculiarità del contesto geologico e sismotettonico dello specifico luogo, hanno evidenziato il carattere fortemente *inter-* e *multi-* disciplinare di questa tipologia di studi. Le attività sono infatti state svolte da un gruppo di specialisti che hanno messo in campo competenze afferenti a discipline diverse benché mutuamente interagenti. Tra esse si citano la geotecnica, la geologia, la geofisica, la sismologia e l'ingegneria sismica. Ognuna di queste discipline è caratterizzata da approcci metodologici diversi e diversa è la risoluzione spaziale dei modelli adottati. La sfida, nel perseguimento degli obiettivi della microzonazione, è riconoscere l'esistenza di un unico modello di sottosuolo che armonizzi in modo coerente le diverse scale a cui è definito e la varietà di proprietà che lo caratterizzano.

Ringraziamenti

Il lavoro illustrato in questo articolo è stato svolto nell'ambito del progetto di ricerca LiquefACT *Assessment and mitigation of liquefaction potential across Europe: a holistic approach to protect structures and infrastructures*

for improved resilience to earthquake-induced liquefaction disasters finanziato dalla Commissione Europea attraverso il Programma Horizon 2020 (Grant Agreement No. 700748). L'autore è grato alla Commissione Europea per il supporto finanziario ricevuto.

La microzonazione sismica del comune di Cavezzo è stata effettuata da un gruppo di lavoro multidisciplinare ed interistituzionale. L'autore desidera ringraziare tutti coloro che, a vario titolo, hanno dato un contributo allo studio. Tra questi si citano in particolare Roberta Bonì (Università di Pavia), Francesca Bozzoni (Eucentre, Pavia), Daniele Conca (Eucentre, Pavia), Renato Maria Cosentini (Politecnico di Torino), Antonino Famà (Eucentre, Pavia), Luca Martelli (Regione Emilia-Romagna), Claudia Meisina (Università di Pavia), Lorenzo Petronio e Valerio Poggi (Istituto Nazionale di Oceanografia e di Geofisica Sperimentale), Elisa Zuccolo (Eucentre, Pavia).

L'autore desidera infine ringraziare il Sindaco ed il personale tecnico del Comune di Cavezzo per il prezioso supporto fornito durante tutte le fasi dello studio.

Riferimenti bibliografici

[ASTM D5778 2020] *Standard test method for electronic friction cone and piezocone penetration testing of soils*, ASTM International, book of standards volume: 04.08, pp.17, 2020.

[Baise *et al.* 2012] L.G. Baise, D. Daley, J. Zhu, E.M. Thompson, K. Knudsen, *Geospatial liquefaction hazard model for Kobe, Japan and Christchurch,* New Zealand. Seismol. Res. Lett.*, 83, 2012, p. 458.*

[BEE 2021] Special Issue: *The H2020 European Project LiqueFACT*, Bull. Earthq. Eng., 19(10) S.I.: The H2020 European Project LIQUEFACT, 2021, pp. 3803-4169.

[Boulanger e Idriss 2016] R.W. Boulanger, I.M. Idriss, *CPT-based liquefaction triggering procedure*, J. Geotech. Geoenviron. Eng., 142 (2): 04015065, 2016.

[Boulanger e Idriss 2014] R.W. Boulanger, I.M. Idriss, *CPT and SPT based liquefaction triggering procedures. Center for geotechnical modeling*, Department of Civil and Environmental Engineering, University of California, Davis. Report No. UCD/CGM-14/01.

[Boulanger e Ziotopolou 2015] R.W. Boulanger, K. Ziotopolou, *PM4 sand model (v.3): a sand plasticity model for earthquake engineering applications, report no. UCD/CGM-15/01*, Center for Geotechnical Modeling, Department

of Civil and Environmental Engineering, University of California at Davis, California (USA), 2015, 112 pp.

[Bozzoni *et al.* 2021a] F. Bozzoni, A. Cantoni, M.C. De Marco, C.G. Lai, *ECLiq: European interactive catalogue of earthquake-induced soil liquefaction phenomena*, Bull. Earthq. Eng., 19(12), 2021, pp. 4719-4744.

[Bozzoni *et al.* 2021b] F. Bozzoni, R. Bonì, D. Conca, C.G. Lai, E. Zuccolo, C. Meisina, *Megazonation of earthquake-induced soil liquefaction hazard in continental Europe*, Bull. Earthq. Eng., 19(10), S.I.: The H2020 European Project LIQUEFACT, 2021, pp. 4059-4082.

[Castaldini 1989] D. Castaldini, *Evoluzione della rete idrografica centropadana in epoca protostorica e storica*, Atti Conv. Naz. Studi Insediamenti e viabilità nell'alto ferrarese dall'Età Romana al Medioevo, Cento, 8-9 Maggio 1987 Acc. delle Sc. di Ferrara, Ferrara, pp. 115-134.

[Castro 1969] G. Castro, *Liquefaction of sands*, Harvard Soil Mechanics Series 87, Harvard University, Cambridge, Massachusetts 1969.

[CGS 2008] *Guidelines for evaluating and mitigating seismic hazards in California*, California Geological Survey, 2008, Special Publication 117A.

[Chawla *et al.* 2002] N.V. Chawla, K.W. Bowyer, L.O. Hall, W.P. Kegelmeyer, *SMOTE: Synthetic minority over-sampling technique*, J. Artif. Intell. Res., 16, 2002, pp. 321-357.

[Corigliano *et al.* 2012] M. Corigliano, C.G. Lai, M. Rota, C.L. Strobbia, *ASCONA: automated selection of compatible natural accelerograms*, Earth. Spectra, 28(3), 2012, pp. 965-987.

[Cramer *et al.* 2017] C.H. Cramer *et al.*, *St. Louis area earthquake hazards mapping project: seismic and liquefaction hazard maps*, Seismol. Res. Lett. 88(1), 2017, pp. 206-223.

[Cubrinovski *et al.* 2017] M. Cubrinovski, A. Rhodes, N. Ntritsos, S. Van Ballegooy, *System response of liquefiable deposits*, Vancouver (Canada), Atti della terza International Conference on Performance-Based Design in Earthquake Geotechnical Engineering (PBD-III), 16-19 Luglio, 2017.

[Cubrinovski *et al.* 2012] M. Cubrinovski, D. Henderson, B.A. Bradley, *Liquefaction impacts in residential areas in the 2010-2011 Christchurch earthquakes*, Tokyo (Japan): *One Year after 2011 Great East Japan Earthquake*, Atti dell'International Symposium on Engineering Lessons Learned from the Giant Earthquake, 3-4 Mar 2012.

[Cubrinovski e Ishihara 1998] M. Cubrinovski, K. Ishihara, *State concept and modified elastoplasticity for sand modelling*, Soils Found., 38(4), 1998, pp. 213-225.

[Facciorusso *et al.* 2017] J. Facciorusso, C. Madiai e G. Vannucchi, *Corrections*

to mechanical CPT results for use in liquefaction evaluation, Bull. Earthq. Eng., 15(9), 2017, pp. 3505-3528.

[Fawcett *et al.* 2005] T. Fawcett, *An introduction to ROC analysis*, Pattern Recognit. Lett., 27, 2005, pp. 861-874.

[Fernández *et al.* 2018] A. Fernández, S, García, M. Galar, R.C. Prati, B. Krawczyk, F. Herrera, *Learning from Imbalanced Data*, Springer, I edizione, 2018.

[Giretti e Fioravante 2017] D. Giretti e V. Fioravante, *A correlation to evaluate cyclic resistance from CPT applied to a case history*, Bull. Earthq. Eng., 15, 2017, pp. 1965-1989.

[Green e Bommer 2019] R.A. Green e J.J. Bommer, *What is the smallest earthquake magnitude that needs to be considered in assessing liquefaction hazard?*, Earth. Spectra, 35(3), 2019, pp. 1441-1464.

[He *et al.* 2008] H. He, Y. Bai, E.A. Garcìa, S. Li, *ADASYN: Adaptive Synthetic Sampling Approach for Imbalanced Learning*, Hong Kong (Cina), Atti dell'International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN 2008), 1-6 Giugno 2008.

[Hudson *et al.* 1994] M.B. Hudson, M. Beikae, I.M. Idriss, *QUAD4M – a computer program to evaluate the seismic response of soil structures using finite element procedures and incorporating a compliant base*, Center for geotechnical modeling, University of California, Davis, USA 1994.

[ICMS 2008] Gruppo di lavoro MS, *Indirizzi e criteri per la microzonazione sismica*, Conferenza delle Regioni e delle Province autonome – Dipartimento della protezione civile, Roma, 3 vol. e dvd, 2008.

[ICMS-LIQ 2017] *Microzonazione sismica. Linee guida per la gestione del territorio in aree interessate da liquefazione (LQ)*. Versione 1.0. Commissione tecnica per la microzonazione sismica, Roma 2017.

[Idriss e Sun 1992] I.M. Idriss e J.I. Sun, *SHAKE91 – a computer program for conducting equivalent linear seismic response analyses of horizontally layered soil deposits*, University of California, Davis, USA 1992.

[Ishihara *et al.* 1975] K. Ishihara, F. Tatsuoka, S. Yasuda, *Undrained deformation and liquefaction of sand under cyclic stresses*, Soils Found., 15(1), 1975, pp. 29-44.

[ISMS-RER 2015], *Deliberazione della Giunta della Regione Emilia-Romagna n. 2193 del 21 dicembre 2015: Art. 16 della L.R. n. 20 del 24/3/2000. Approvazione aggiornamento dell'Atto di coordinamento tecnico denominato «Indirizzi per gli studi di microzonazione sismica in Emilia-Romagna per la pianificazione territoriale e urbanistica»*, Boll. Uff. Regione Emilia-Romagna 4, 8 Gennaio 2016.

[ISSMGE 1999] *Manual for zonation on seismic geotechnical hazards (Revised*

Version), Technical Committee for Earthquake Geotechnical Engineering, TC 4, ISSMGE, pubblicato da The Japanese Geotechnical Society, 1999, 210 pp.

[Iwasaki *et al.* 1978] T. Iwasaki, F. Tatsuoka, K. Tokida, S. Yasuda, *A practical method for assessing soil liquefaction potential based on case studies at various sites in Japan*, San Francisco (USA), Atti della seconda International Conference on Microzonation for Safer Construction, pp. 885-896.

[Jefferies e Been 2015] M. Jefferies, K, Been, *Soil liquefaction. A critical state approach*, Taylor e Francis, Londra 2015[2], 712 pp.

[Kramer 1996] S.L. Kramer, *Geotechnical earthquake engineering*, Prentice-Hall International Series in Civil Engineering and Engineering Mechanics, 1996, 653 pp.

[Lai 2021] C.G. Lai, *Il Progetto europeo LIQUEFACT H2020*, Atti del Convegno "Il progetto LIQUEFACT in Emilia-Romagna", webinar tenuto il 17 Febbraio 2021, pp. 7-9, Regione Emilia-Romagna.

[Lai *et al.* 2021] C.G. Lai *et al.*, *Technical guidelines for the assessment of earthquake induced liquefaction hazard at urban scale*, Bull. Earthq. Eng., 19(10), S.I.: The H2020 European Project LIQUEFACT, 2021, pp. 4013-4057.

[Lai *et al.* 2020] C.G. Lai *et al.*, *An inter-disciplinary and multi-scale approach to assess the spatial variability of ground motion for seismic microzonation: the case study of Cavezzo municipality in Northern Italy*, Eng. Geol., 274(5), 2020, pp. 1-14.

[Lai *et al.* 2019] C.G. Lai *et al.*, *Methodology for assessment of earthquake induced risk of soil liquefaction at the four European testing sites (microzonation)*, Deliverable D2.7, 2019, Project Liquefact, H2020-DRA-2015, GA No. 700748.

[Lai *et al.* 2018] C.G. Lai *et al.*, *Seismic microzonation for liquefaction risk*, Torino (Italia), Atti XXV Conferenze di Geotecnica di Torino (CGT 2018) su Analisi e Progetto delle Opere Geotecniche in Zona Sismica, 8-9 Novembre 2018.

[Lai *et al.* 2009] C.G. Lai, S. Foti, M. Rota, *Input sismico e stabilità geotecnica dei siti di costruzione*, Collana di Manuali di Progettazione Antisismica, vol. 6, IUSS Press. Prodotto e distribuito da Fondazione Eucentre, Pavia 2009, pp. 312.

[Locati *et al.* 2016] M. Locati *et al.*, *DBMI15, Database Macrosismico Italiano 2015*, Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia, disponibile al link https://doi.org/10.6092/INGV.IT-DBMI15, 2016.

[Luco e Cornell 2007] N. Luco e C.A. Cornell, *Structure-specific scalar intensity measures for near-source and ordinary earthquake ground motions*, Earth. Spectra, 23 (2), 2007, pp. 357-392.

[Mascandola *et al.* 2019] C. Mascandola, M. Massa, S. Barani, D. Albarello, S. Lovati, L. Martelli, V. Poggi, *Mapping the seismic bedrock of the Po plain (Italy) through ambient-vibration monitoring*, Bull. Seismol. Soc. Am., 109 (1), 2019, pp. 164-177.

[Maurer *et al.* 2019] B.W. Maurer, R.A. Green, S. van Ballegooy, L. Wotherspoon, *Development of region-specific soil behavior type index correlations for evaluating liquefaction hazard in Christchurch, New Zealand*, Soil Dyn. Earthq. Eng., 117, 2019, pp. 96-105.

[Maurer *et al.* 2015] B.W. Maurer, R.A. Green, M. Cubrinovski, B. Bradley, *Assessment of CPT-based methods for liquefaction evaluation in a liquefaction potential index framework*, Géotechnique, 65 (5) 2015, pp. 328-336.

[Mayne 2007] P. Mayne, *Cone penetration testing state-of-practice, final report*, NCHRP Project 20-05, Topic 37-14, Transportation Research Board, Washington, DC (USA), 137 pp.

[Meisina *et al.* 2019] C. Meisina *et al.*, *3D Geological model reconstruction for liquefaction hazard assessment in the Po Plain*, Roma (Italia), Atti della settima International Conference on Earthquake Geotechnical Engineering (7ICEGE), 17-20 Giugno, 2019.

[Modoni *et al.* 2021] G. Modoni *et al.*, *Analisi del rischio da liquefazione sismo-indotta a scala urbana: applicazione al Comune di Terre del Reno*, Atti del Convegno "Il progetto LIQUEFACT in Emilia-Romagna", webinar tenuto il 17 Febbraio 2021, pp. 50-89, Regione Emilia-Romagna.

[Moss *et al.* 2006] R.E.S. Moss *et al.*, *CPT-based probabilistic and deterministic assessment of in situ seismic soil liquefaction potential.*, J. Geotech. Geoenviron. Eng., 132 (8), pp. 1032-1051, 2006.

[Moustafa 2015] S.S.R. Moustafa, *Application of the Analytic Hierarchy Process for Evaluating Geo-Hazards in the Greater Cairo Area*, Egypt EJGE*, 20:6, 2015.*

[NASEM 2016] *State of the art and practice in the assessment of earthquake-induced soil liquefaction and its consequences*, National Academies of Sciences, Engineering, and Medicine, Washington, DC: The National Academies Press, 2016.

[NTC-2018] *Norme Tecniche per le Costruzioni.* Ministero delle Infrastrutture e dei Trasporti, Decreto Ministeriale del 17 gennaio 2018, Supplemento ordinario alla G.U. n. 8 del 20 febbraio 2018.

[NZGS 2016] *Earthquake geotechnical engineering practice in New Zealand – Module 3: identification, assessment and mitigation of liquefaction hazards*, Ministry of Business, Innovation & Employment, New Zealand Geotechnical Society, 2016.

[Panahi *et al.* 2014] M. Panahi, F. Rezaie, S. Meshkani, *Seismic vulnerability assessment of school buildings in Tehran city based on AHP and GIS*, Nat. Hazards and Earth System Sciences Discus., 1, 2014, pp. 4511-4538.

[Pecker 2021] A. Pecker, *«The H2020 European Project LiqueFACT»*, Bull. Earthq. Eng., 19(10), S.I.: The H2020 European Project LIQUEFACT, 2021, pp. 3803-3806.

[Robertson 2009] P.K. Robertson, *Performance-based earthquake design using the CPT*, Tokyo (Giappone), Atti dell'International Conference on Performance-Based Design in Earthquake Geotechnical Engineering (IS Tokyo 2009), 15-18 Giugno 2009.

[Rovida *et al.* 2016] A. Rovida, M. Locati, R. Camassi, B. Lolli, P. Gasperini (a cura di), *CPTI15, the 2015 version of the Parametric Catalogue of Italian Earthquakes*, Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia, 2016, https://emidius.mi.ingv.it/CPTI15-DBMI15/

[Saaty 1980] T.L. Saaty, *The analytic hierarchy process*, McGraw-Hill, New York, 1980.

[Sawicki e Mierczyński 2006] A. Sawicki, J. Mierczyński, *Developments in modeling liquefaction of granular soils, caused by cyclic loads*, Appl. Mech. Rev., ASME, 59(2), 2006, pp. 91-106.

[Schnabel *et al.* 1972] P.B. Schnabel, J. Lysmer, H.B. Seed, *SHAKE: A computer program for earthquake response analysis of horizontally layered sites*, report no. EERC 72-12, EERI, Berkeley, USA, 1972.

[SMM-India 2011] *Seismic microzonation manual*, Geoscience Division, Ministry of Earth Sciences, Government of India, 2011.

[Sonmez 2003] H. Sonmez, *Modification of the liquefaction potential index and liquefaction susceptibility mapping for a liquefaction- prone area (Inegol, Turkey)*, Environ. Geol., 44, 2003, pp. 862-871.

[Stringer *et al.* 2016] M.E. Stringer, M. Cubrinovski, I. Haycock, *Experience with gel-push sampling in New Zealand*, Queensland (Australia), Atti dell'International Conference on Geotechnical and Geophysical Site Characterisation (ISC5), 5-9 September 2016.

[Tonkin e Taylor 2013] Tonkin e Taylor, *Liquefaction Vulnerability Study. Report to Earthquake Commission, T and T ref. 52020.0200/v1.0* redatto da S. van Ballegooy e P. Malan, disponibile su https://www.nzgd.org.nz/, 2013.

[Unesco 1972] *Report of consultative meeting of experts on the statistical study of natural hazards and their consequences.* Document SC/WS/500, United Nations Educational Scientific and Cultural Organizations, 1972, pp. 1-11.

[Van Ballegooy *et al.* 2014] S. Van Ballegooy, P. Malan, V. Lacrosse, M.E. Jacka, M. Cubrinovski, J.D. Bray, T.D. O'Rourke, S.A. Crawford, H. Cowan, *As-*

sessment of liquefaction-induced land damage for residential Christchurch, Earth. Spectra, 30 (1), 2014, pp. 31-55.

[Vessia *et al.* 2021] G. Vessia, G. Laurenzano, A. Pagliaroli, M. Pilz, *Seismic site response estimation for microzonation studies promoting the resilience of urban centers*, Eng. Geol., 284(1), p. 106031, 2021.

[Yasuda *et al.* 2012] S. Yasuda, K. Harada, K. Ishikawa, Y. Kanemaru, *Characteristics of liquefaction in Tokyo Bay area by the 2011 Great East Japan Earthquake*, Soils Found., 52(5), 2012, pp. 793-810.

[Yilmaz 2004] Z. Yilmaz, *GIS-based structural performance assessment of Sakarya City after 1999 Kocaeli earthquake from geotechnical and earthquake engineering point of view*, MSc thesis, Graduate School of Natural and Applied Sciences, Middle East Technical University, Ankara, Turkey, 2004.

[Zhang *et al.* 2004] G. Zhang, P.K. Robertson, R.W.I. Brachman, *Estimating liquefaction-induced lateral displacements using the standard penetration test or cone penetration test*, J. Geotech Geoenviron Eng, 130(8), 2004, pp. 861-871.

[Zhang *et al.* 2002] G. Zhang, P.K. Robertson, R.W.I. Brachman, *Estimating liquefaction-induced ground settlements from CPT for level ground*, Can. Geotech. J. 39(5), pp. 1168-1180.

[Zhu *et al.* 2017] J. Zhu, L. Baise, E. Thompson, *An updated geospatial liquefaction model for global application*, Bull. Seismol. Soc. Am., 107(3), 2017, pp. 1365-1385.

[Zhu *et al.* 2015] J. Zhu, D. Daley, L. Baise, E. Thompson, D. Wald, K. Knudsen, *A geospatial liquefaction model for rapid response and loss estimation*, Earth. Spectra, 31(3), 2015, pp. 1813-1837.

Acc. Sc. Torino
Memorie 1 (2022), 99-134, 23 figg., 11 tabb. SCIENZA DELL'INGEGNERIA

Multilayered Beam, Plate and Shell Theories with Interlaminar Variables and Lagrange Polynomials

Erasmo Carrera[*], Riccardo Augello[**]
e Daniele Scano[***]

Memoria presentata dal Socio corrispondente Erasmo Carrera
nell'adunanza del 9 febbraio 2022, ricevuta il 4 marzo 2022
e approvata nell'adunanza del 18 maggio 2022

Abstract. *This paper proposes Finite Elements (FEs) based on Lagrange polynomials for the static analysis of multilayered one-dimensional beams and two-dimensional plates and shells. Lagrangian Mechanics (LM) is recalled as the starting point for the development of the Carrera Unified Formulation (CUF), which is adopted to derive FE matrices. In addition, CUF allows accounting for the assumption of any theory order, e.g., any choice of Lagrange Points (LPs) through the layers, mainly values at the interfaces. FEs are developed in the framework of the so-called Equivalent Single Layer (ESL) modellings, and the results are compared to the more traditional and more computationally expensive Layer-Wise (LW) approaches. Four well-known benchmarks are considered to assess the capability and effectiveness of the proposed ESL beam, plate and shell FEs. Results clearly demonstrate the reliability of the models for the evaluation of displacements and both in-plane and shear stresses. Finally, the advantages of theories based on Lagrange polynomials formulations to deal with non-classical geometrical boundary conditions and global-local approaches are discussed.*

Keywords: Lagrange Polynomials, Unified Models, Multilayered Beams, Plates and Shells, Finite Element Method, Carrera Unified Formulation.

[*] Politecnico di Torino; erasmo.carrera@polito.it

[**] Politecnico di Torino; riccardo.augello@polito.it

[***] Politecnico di Torino; daniele.scano@studenti.polito.it

Riassunto. *Questo articolo propone alcuni Elementi Finiti (FEs) basati sui polinomi di Lagrange per l'analisi statica di travi, piastre e gusci multistrato. La meccanica Lagrangiana (LM) è richiamata come il punto iniziale per lo sviluppo della* Carrera Unified Formulation *(CUF), la quale è adottata per derivare le matrici degli Elementi Finiti. Inoltre, la CUF permette di considerare assunzioni per teorie di ogni ordine; ad esempio, qualsiasi scelta dei punti di Lagrange (LPs) attraverso gli strati. Gli elementi finiti sono sviluppati nel contesto del cosiddetto approccio* Equivalent Single Layer *(ESL), e i risultati sono confrontati con quelli più onerosi noti come approcci* Layer-Wise *(LW). Quattro problemi campione sono considerati per valutare la capacità ed efficacia degli elementi finiti ESL travi, piastre e gusci. I risultati dimostrano la robustezza dei modelli per il calcolo degli spostamenti e delle tensioni nel piano e trasverse. Infine, sono discussi i vantaggi delle teorie basate sulle formulazioni con i polinomi di Lagrange per trattare condizioni al contorno geometriche non classiche, dimostrandone il vantaggio in analisi* global-local.

Parole chiave: metodo degli elementi finiti, modelli unificati, piastre e gusci, polinomi di Lagrange, travi multistrato.

1. Introduction

In the last decades, multilayered structures have been used in many applications, e.g., in aerospace, naval and automotive fields. The continuous development of sophisticated components led to increasingly complex designs that require reliable analyses, which main issue is represented by the anisotropy of such structures, causing complex mechanical phenomena. For instance, the shear stresses must fulfil interlaminar continuity and transversely discontinuous mechanical properties cause the zig-zag distribution of displacement fields.

In [1], these effects were referred to as C^0_z-requirements. The coupling between the in-plane and out-of-plane strains also represents a challenging topic. An overview of several computational techniques for the analysis of one-dimensional (1D) and two-dimensional (2D) structures can be found in major review articles, see [2, 3] and [4, 5], respectively. However, a brief discussion about some noteworthy contributions in the field is given hereafter for the sake of completeness. Classical theories such as the Euler-Bernoulli Beam Model (EBBM) [6], and Timoshenko Beam Model (TBM) [7] are still widely applied in numerical simulations, although they

lack the ability to accurately evaluate the shear strain components, which are considered null by EBBM and constant by TBM. When dealing with thin-walled structures, whose cross-sectional deformation is relevant, an accurate evaluation of the stress distribution is necessary to describe the higher-order phenomena. For this reason, classical approaches may be inappropriate and lead to wrong conclusions, and advanced structural theories must be considered, see the classical book by Novozhilov [8]. Vlasov [9] introduced warping functions to capture the deformations of beam cross-sections. This approach found great success among scientists, see the works by Ambrosini *et al.* [10], Mechab *et al.* [11] and Friberg [12], who made use of warping functions for thin-walled structures. The so-called Generalized Beam Theory (GBT) was suggested by Schardt [13]. GBT allows the displacement field to be expressed as a linear combination of cross-sectional deformation modes. This theory was adopted by Peres *et al.* [14] for the analysis of curved thin-walled beams, and by Silvestre [15] for buckling problems.

As far as the 2D plate and shell problems are concerned, the classical 2D model is represented by Kirchhoff-Love theory [16, 17], whose extension to laminates is known as the Classical Lamination Theory (CLT) [18]. CLT neglects the effect of out-of-plane strains and some drawbacks can surge for practical studies. On the other hand, First Shear Deformation Theory (FSDT), which is based on the works by Reissner [19] and Mindlin [20], accounts for the shear deformation effects by linear variation of in-plane displacements and it still plays a key role in commercial codes. In order to overcome the limitations of classical theories, several refined plate Finite Elements (FEs) were developed over the last years. For instance, see the one developed by Reddy [21], the so-called zig-zag theories [1], the theories based on the Reissner's Mixed Variational Theorem (RMVT) [5]. Most of the works discussed so far are based on an Equivalent Single Layer (ESL) approximation of the laminate. In ESL models, the variables are independent of the number of layers. On the other hand, a detailed analysis may require the adoption of Layer-Wise (LW) models, where the number of unknowns depends on the number of layers (see Carrera [22]). FE implementations of LW theories were proposed by many authors, such as for example Rammerstorfer *et al.* [23], Reddy [24], Mawenya and Davies [25], and Noor and Burton [26]. However, the enhanced accuracy of LW models demands high computational costs. A review of the theories for the analysis of anisotropic multilayered plates was proposed by Carrera [27] and by Carrera and Robaldo [28] for thermo-piezoelasticity.

Several efforts were addressed by researchers to make the composite beam, plate and shells models as accurate as efficient. An example is the concept of selective ply grouping or sublaminates [29, 30, 31], in which some local regions are created over the plate and shell thickness, identified by specific ply or plies, where LW theories are applied. On the other hand, in the global region, which is the portion of the domain where accurate analysis is not needed, lower-order and eventually ESL models can be adopted. Both ESL and LW models may eventually be implemented by using a combination of Lagrange and Legendre polynomials for formulate the kinematics theory over the thickness.

In this manner, the continuity of the variables between local and global regions can be immediately satisfied. In the work by Botshekanan Dehkordi *et al.* [32], a variable kinematics description in the thickness direction for the static analysis of sandwich plates was performed. That model was derived in the framework of the Carrera Unified Formulation (CUF) and Reissner-Mixed-Variational-Theorem (RMVT) was adopted for an *a-priori* evaluation of the transverse shear and normal stresses. Thus, the transverse stresses were approximated using a mixed LW/ESL approach. Adopting the principle of virtual displacements, Carrera and Valvano [33] implemented variable kinematics shell models for laminated structures with embedded piezoelectric components using Legendre polynomials. Instead, Lagrange polynomials are used for beam and plate and shell formulations in Pagani *et al.* [34].

A method to further reduce the computational costs, while keeping a high level of accuracy, is the adoption of global/local techniques. They were developed especially for composite materials, see [35]. Among these methods, particular attention is dedicated to the so-called «multi-steps methods», in which the local analysis of the zone of interest requires the boundary conditions at the interface level that are obtained by the analysis of the global structure. For instance, the global/local methodology proposed by Mao *et al.* [36] makes use of a coarse mesh to analyse the entire structure and to obtain the nodal displacements, which were subsequently applied as boundaries to the refined local model. According to [36], the application of the boundary conditions in the local region inevitably introduces errors. To minimize the effect of such errors, the local analysis generally requires a larger region than the critical one, where accurate stress fields need to be evaluated. In the framework of CUF, a two-step global/local methodology can be built (see [37, 35, 38]). The first step is devoted to the static analysis of a global model of the structure and it could

be done by commercial software using 1D or 2D elements. A criterion is established to identify the most critical region, which is subsequently analyzed in the second step by using high-order models, to obtain accurate stress fields. The refined theories used in the detailed analysis are implemented in the framework of CUF. Another class of methods concerns the coupling of "refined" and "coarse" subdomains. Dhia [39] and Dhia and Rateau [40] suggested the Arlequin method to enforce compatibility within the overlapping domain with Lagrange multipliers. The Arlequin method was implemented in the framework of CUF by Biscani *et al.* [41] for 1D and 2D models [42]. He *et al.* [43] adopted the Arlequin method to bridge low- and high-order models constructed with CUF, and the Constrained Variational Principle (CVP) was used to derive beam elements for multi-layered structures with individual kinematics in each layer. Similar results were reproduced by Carrera *et al.* [44, 45] by coupling models with different kinematics by using point-wise Lagrange multipliers. The two methods differ since the first one needs an overlapping region between the sub-domains.

This paper wants to establish and detail the advantage of adopting the Lagrange polynomial for the construction of finite elements of beams, plates and shells.

The main advantages of Lagrangian approach are the following:

– The user can choose the number of Lagrange Points (LPs) and their position, within the domain of the thickness in the case of plates and shells and the cross-section in the case of beams, without altering the results;
– The unknowns at every LP are pure displacements, and it is possible to use different boundary and congruence conditions.

This paper is structured as follows: Section 2 gives a brief introduction about the Lagrangian Mechanics (LM) as a starting point for CUF formalism, followed by a description of the proposed approach for the modelling of multilayered beams, plates and shells in Section 3. Section 4 describes the CUF form of the beam, plate, shell assumptions while Section 5 introduces the related FEs description. Section 6 describes the four case studies analyzed in this work, whereas the ESL numerical results, in terms of displacements and axial and shear stresses, are given in Section 7. In Section 8, meaningful examples are presented to assess the validity of the proposed ESL Lagrange

approach for changing boundary conditions and global/local methodology. Finally, the conclusions of this work are drawn.

2. Lagrangian mechanics and CUF

Two popular approaches for the analysis of structures are represented by the Newtonian and Lagrangian Mechanics (LM). The former considers the "equilibrium" of the forces, internal and external, acting on the body. For instance, let us consider a generic bar structure with constant cross-section and isotropic and homogeneous material subjected to an external traction force and a distributed axial force, as depicted in Fig. 1.

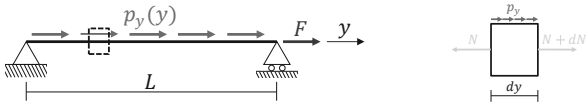


FIGURE 1 – *Generic bar with constant cross-section and isotropic and homogeneous material subjected to an external traction force and a distributed axial force.*

The equilibrium along the y direction can be written as

$$N_{,y} = -p_y \tag{1}$$

where $N = \int \sigma_{yy}\, dA$ is the internal axial force, with A being the area of the cross-section, σ_{yy} the axial stress coming from the Hooke's law $\sigma_{yy} = E\, \varepsilon_{yy}$, E the Young modulus and $\varepsilon_{yy} = v_{,y}$. Finally, p_y is the applied distributed loading. In the case of LM, the principle of virtual work is introduced and applied to the proposed problem:

$$\delta L_{int} = \delta L_{ext} \tag{2}$$

The choice of the Degree Of Freedom (DOF), to be used in Eq. (2), needs to be taken. In this application, the displacement along the axial direction is selected, and it is considered constant over the cross-section (x, z) of the bar in Fig. 1. As a consequence, the unknown displacement and its variation are

$$\begin{aligned} v(x,y,z) &= v^0(y), \\ \delta v(x,y,z) &= \delta v^0(y) \end{aligned} \tag{3}$$

The two terms of Eq. (2) can be written as follows :

$$\begin{aligned}\delta L_{int} &= \int_{\mathrm{V}} \sigma_{yy}\delta\varepsilon_{yy}\mathrm{dV} = \int_0^{\mathrm{L}} \mathrm{A}\sigma_{yy}\delta\varepsilon_{yy}\mathrm{d}y = \int_0^{\mathrm{L}} N\delta\varepsilon_{yy}\mathrm{d}y = \int_0^{\mathrm{L}} N\delta v^0_{,y}\mathrm{d}y \\ \delta L_{ext} &= \int_0^{\mathrm{L}} p_y\delta v^0(y)\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{4}$$

where V is the volume of the structure. Introducing Eq. (4) into Eq. (2), upon integration by parts (see [46] for details), the following relation is obtained (boundary condition terms are omitted for the sake of brevity) :

$$\delta v^0 : N_{,y} = -p_y \tag{5}$$

which clearly states that the LM leads to the governing equations consistent to the choice made at Eq. (3).
The process of making assumptions can be generalized and written in a unified manner, including the DOFs related to the cross-sectional displacement, as follows (this would consist in a beam case) :

$$\begin{array}{lcll}\mathbf{u}(x,y,z) & = & F_\tau(x,z)\mathbf{u}_\tau(y), & \tau = 1,...,M \\ \delta\mathbf{u}(x,y,z) & = & F_s(x,z)\delta\mathbf{u}_s(y), & s = 1,...,M\end{array} \tag{6}$$

where $\mathbf{u}(x,y,z) = \{u,v,w\}^{\mathrm{T}}$, M is the number of terms of the expansion function $F_\tau(x,z)$ and $F_s(x,z)$ and the summing convention with the repeated indexes τ and s is assumed. [1]
Equation (6) represents the starting point for the Carrera Unified Formulation (CUF). Using Eq. (2), the description of the static problem results in the resolution of the following relation written in the strong form:

$$\delta\mathbf{u}_s : \ \mathbf{K}^{\tau s}\,\mathbf{u}_\tau = \mathbf{P}_s \tag{7}$$

The boundary conditions equations have to be added to Eq. (7), as detailed, for instance, in [47]. The unified formulation is described and adopted in this work to build beam, plate and shells models.

[1] Considering the v displacement only and $N = 1$, $N = F_\tau(x, z) = F_s(x, z) = 1$, $v_\tau(y) = \mathrm{v}^0(y)$ and $\delta v_s = \delta v^0$, Eq. (6) is reduced to Eq. (3).

3. Use of Lagrange Polynomials in theory of structures.

The advantages of adopting Lagrange polynomials for the structural analysis are discussed in this section. We start with one-dimensional beam structures.

3.1. The case of homogeneous beams

The properties and possibility of Lagrange polynomials are considered in the following bullets.

— Placement of unknown variables. Considering a generic beam structure as depicted in Fig. 2(a) and applying TBM in Fig. 2(b), the three-dimensional displacement field is evaluated as follows

$$\begin{array}{lcl} u(x,y,z) & = & u_1^0(y) \\ v(x,y,z) & = & v_1^0(y) + z\phi_{x1} - x\phi_{z1} \\ w(x,y,z) & = & w_1^0(y) \end{array} \tag{8}$$

The system of equations described in Eq. (2) has five unknowns. The

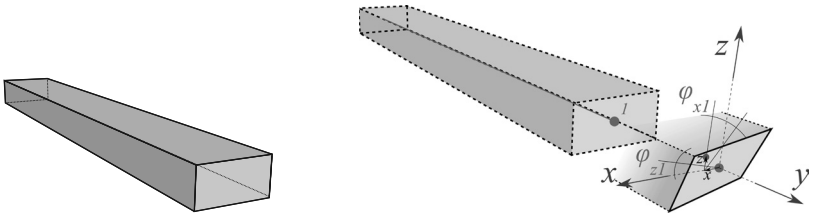


FIGURE 2 – *Generic beam structure (a) and Timoshenko Beam Theory (b).*

structure depicted in Fig. 2(a) can be described using Lagrange polynomials, and the corresponding LPs can be put as described in Fig. 3 in order to replicate the situation described by the classical approach (Fig. 2(b)). The resulting system of equations is then

$$\begin{array}{lcl} u(x,y,z) & = & u(y) \\ v(x,y,z) & = & L_1 v_1(y) + L_2 v_2(y) + L_3 v_3(y) + L_4 v_4(y) \\ w(x,y,z) & = & w(y) \end{array} \tag{9}$$

where L_1, L_2, L_3 and L_4 are the Lagrange polynomials evaluated at the

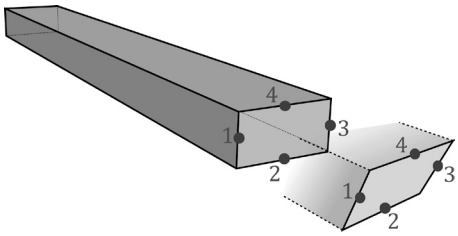


FIGURE 3 – *Generic beam structure with the Lagrangian approach.*

corresponding LPs. Then, the capability of LM to be valid for every point can be exploited, and the position of them can be changed to describe the geometry of the cross-section, as described in Fig. 4.

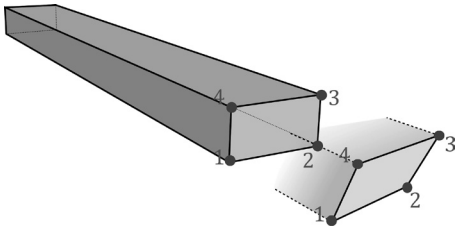


FIGURE 4 – *Generic beam structure with Lagrangian approach exploiting the capability of localization of LPs.*

— **The problem variables are pure displacements.** Referring to Fig. 4, the kinematic of the cross-section can be enriched as described in the following relations:

$$\begin{array}{lcl} u(x,y,z) & = & L_1u_1(y)+L_2u_2(y)+L_3u_3(y)+L_4u_4(y) \\ v(x,y,z) & = & L_1v_1(y)+L_2v_2(y)+L_3v_3(y)+L_4v_4(y) \\ w(x,y,z) & = & L_1w_1(y)+L_2w_2(y)+L_3w_3(y)+L_4w_4(y) \end{array} \tag{10}$$

The resulting system of equations has 12 unknowns, which are the displacements on the three directions of the four LPs laying on the cross-section. This leads to a heavier model (more DOFs), but allows for the description of the cross-section in-plane deformation.

— **Application of boundary conditions.** Boundary conditions can be used as kinematic constraints in correspondence of each LP. As a consequence, it is possible to use boundary conditions also in the longitudinal

edges (see [48]). An example is given in Fig. 5.

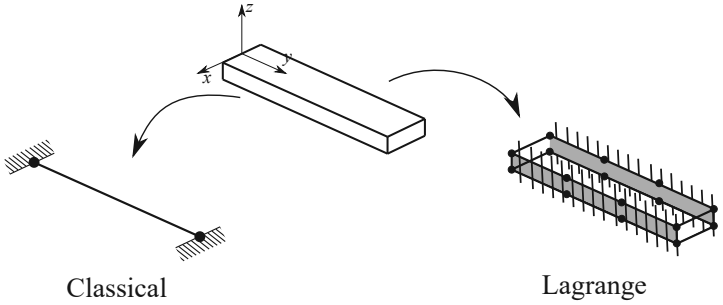


FIGURE 5 – *Boundary condition application with classical approach and Lagrange polynomial.*

3.2. The case of multilayered structures

Multilayered structures are characterized by the so-called C_z^0 requirements [1], that is the displacements and shear stresses are step-wise continuous in the thickness direction of the laminate. As depicted in Fig. 6, LPs can be used at the interface between two layers, and since the unknowns are pure displacements, the C_z^0 requirements are satisfied. If a given Lagrange polynomial is used in

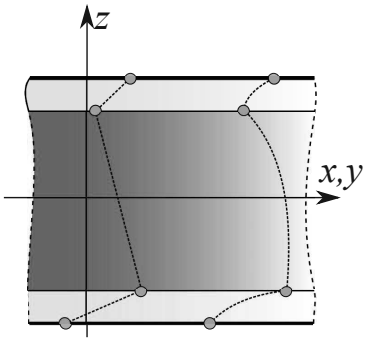


FIGURE 6 – *Application of LPs at the interlaminar level of a composite structure.*

each layer, the so-called Layer-Wise (LW) approach is obtained, where every

layer has its kinematics independently described. This approach leads to accurate results, but it could result more computationally expensive. An alternative technique is that known as the Equivalent Single Layer (ESL). Basically, it homogenizes every layer into an equivalent one, which properties are obtained as a combination on those of the layers. In the present work the efficiency of ESL models based of Lagrange polynomials is proposed.
The capability of the placement of unknown variables allows for the adoption of the points in any position of the structure. Figure 7 reports a domain of a four-layer structure where 2LPs, 4LPs and 5LPs are employed. Clearly, with

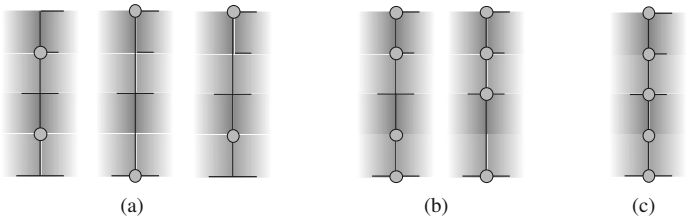


FIGURE 7 – *Four-layer laminated structure discretized with 2LPs (a), 4LPs (b) and 5LPs (c).*

this capability, the desired unknowns can be calculated in any interlaminar position.

4. Unified formulation for beam, plate and shell theories with Lagrange polynomials

Let us consider three beam, plate and shell multilayered structures as shown in Fig. 8. For the 1D model, the cross-section Ω lays on the x,z plane of a Cartesian reference system. As a consequence, the beam axis is placed along the y direction. The 2D plate model uses the z coordinate for the thickness direction and the shell adopts a curvilinear reference frame (α, β, z) to account for the curvature, where α and β are the two in-plane directions. In this paper, cylindrical shell structures are considered.
The displacement vector for the three models is introduced in the following :

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{u}(x,y,z) & = & \{u_x \quad u_y \quad u_z\}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{u}(\alpha,\beta,z) & = & \{u_\alpha \quad u_\beta \quad u_z\}^{\mathrm{T}} \end{array} \tag{11}$$

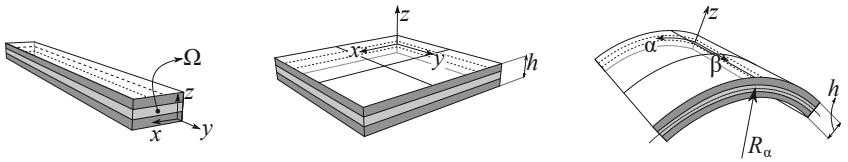


FIGURE 8 – *The modelling of generic composite structures using 1D and 2D plate and shell models. A Cartesian reference system is employed for the 1D beam and 2D plate model (x, y, z), whereas a curvilinear system (α, β, z) is used for the 2D shell model. For 1D model, y is the direction of the beam axis, and for the 2D models z is the thickness coordinate.*

where T is the transpose operator. The first formula of Eq. (11) is valid for beams and plates, the second one for shells. The stress, **σ**, and strain, **ε**, components are expressed in vectorial form as follows:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \{\sigma_{xx}\ \sigma_{yy}\ \sigma_{zz}\ \sigma_{xz}\ \sigma_{yz}\ \sigma_{xy}\}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\varepsilon} = \{\boldsymbol{\varepsilon}_{xx}\ \boldsymbol{\varepsilon}_{yy}\ \boldsymbol{\varepsilon}_{zz}\ \boldsymbol{\varepsilon}_{xz}\ \boldsymbol{\varepsilon}_{yz}\ \boldsymbol{\varepsilon}_{xy}\}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \{\sigma_{\alpha\alpha}\ \sigma_{\beta\beta}\ \sigma_{zz}\ \sigma_{\alpha z}\ \sigma_{\beta z}\ \sigma_{\alpha\beta}\}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\varepsilon} = \{\boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha\alpha}\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\beta\beta}\ \boldsymbol{\varepsilon}_{zz}\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha z}\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\beta z}\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha\beta}\}^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{12}$$

Since linear analysis is performed in this work, only the linear strain components are considered. Therefore, the displacement-strain relations are expressed as

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{b}\,\mathbf{u} \tag{13}$$

where **b** is the matrix of differential operators. It changes according to the employed mathematical model and more information can be found in [49, 50].

As far as the constitutive relation is concerned, linear elastic orthotropic materials are considered in this work. Consequently, the constitutive relation reads as:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\,\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{14}$$

where **C** is the material elastic matrix, whose explicit form can be found in [51, 52]. The 3D displacement field $\mathbf{u}(x,y,z)$ of the 1D beam, 2D plate and

shell models, within the framework of CUF, can be expressed as follows :

$$\begin{array}{lllll}
\text{1D BEAM :} & \mathbf{u}(x,y,z) & = & F_\tau(x,z)\mathbf{u}_\tau(y) & \\
& \delta\mathbf{u}(x,y,z) & = & F_s(x,z)\delta\mathbf{u}_s(y) & \\
\text{2D PLATE :} & \mathbf{u}(x,y,z) & = & F_\tau(z)\mathbf{u}_\tau(x,y), & \tau = 1,2,....,M \\
& \delta\mathbf{u}(x,y,z) & = & F_s(z)\delta\mathbf{u}_s(x,y), & s = 1,2,....,M \\
\text{2D SHELL :} & \mathbf{u}(\alpha,\beta,z) & = & F_\tau(z)\mathbf{u}_\tau(\alpha,\beta) & \\
& \delta\mathbf{u}(\alpha,\beta,z) & = & F_s(z)\delta\mathbf{u}_s(\alpha,\beta) &
\end{array} \tag{15}$$

It is clear that each theory can be easily obtained from Eq. (15) by using polynomials of different orders as F_τ and F_s. The expansion function used in this paper is based on Lagrange polynomials, which general relation is written as :

$$F_m(z) = \prod_{l=0, j\neq m}^{n} \frac{z-z_l}{z_m-z_l} = \frac{(z-z_0)\ldots(z-z_{m-1})\ldots(z-z_n)}{(z_m-z_0)\ldots(z_m-z_{m-1})(z_m-z_{m+1})\ldots(z_m-z_n)} \tag{16}$$

where n is the total number of LPs, m is the LP in which the formula is calculated and l are the other LPs. Obviously, to obtain polynomials of degree $n+1$, n LPs are needed. This formulation allows to arbitrarily change the position of LPs in the section (see Fig. 9).

For 1D structures, bi-dimensional functions discretize the cross-section. In

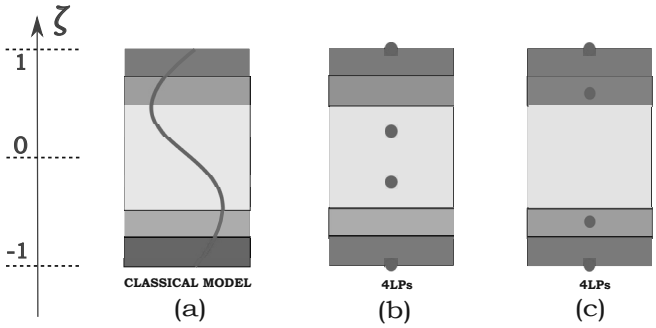


FIGURE 9 – *Through-the-thickness discretization of a multilayered structures using a classical model (a) and two different placement of 4LPs (b, c).*

this work three types of LPs placements are used : four LPs ensure a bi-linear interpolation, nine LPs a quadratic interpolation and sixteen LPs a cubic inter-

polation. For instance, if a quadratic interpolation is employed, the interpolation functions for the 1D beam models are :

$$\begin{aligned} F_\tau &= \frac{1}{4}(r^2+rr_\tau)(s^2+ss_\tau) && \tau = 1,3,5,7 \\ F_\tau &= \frac{1}{2}s_\tau^2(s^2-ss_\tau)(1-r^2)+\frac{1}{2}r_\tau^2(r^2-rr_\tau)(1-s^2) && \tau = 2,4,6,8 \\ F_\tau &= (1-r^2)(1-s^2) && \tau = 9 \end{aligned} \tag{17}$$

where r and s vary from -1 to $+1$, whereas r_τ and s_τ are the coordinates of the LPs. [2]

For 2D structures six different one-dimensional interpolations have been adopted, from 2 to 7 LPs, and the position of points was changed. As an example, the cubic interpolation using 4LPs is detailed hereafter. As shown in Fig. 9, the external LPs are located at $z=-1$ and $z=+1$, respectively, whereas the inner ones can be moved over the domain. The four equations at each LP are written as :

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{(-2)(1+z_2)(1+z_3)}(z^3-(1+z_2+z_3)z^2+(z_2+z_3+z_2z_3)z-z_2z_3) \\ F_2 &= \frac{1}{(z_2+1)(z_2-z_3)(z_2-1)}(z^3-z_3z^2-z+z_3) \\ F_3 &= \frac{1}{(z_3+1)(z_3-z_2)(z_3-1)}(z^3-z_2z^2-z+z_2) \\ F_4 &= \frac{1}{(2)(1-z_2)(1-z_3)}(z^3+(1-z_2-z_3)z^2+(-z_2-z_3+z_2z_3)z+z_2z_3) \end{aligned} \tag{18}$$

5. Finite Element Approximation

The Finite Element Method (FEM) is adopted to discretise the *generalized* displacements $\mathbf{u}_\tau$ and the *generalized* variations $\delta\mathbf{u}_s$. Thus, recalling Eq. (15),

[2] Equation (17) is written in the natural coordinate system, see [50] for more details.

they are approximated as follows

$$\begin{array}{lll}
\text{1D BEAM :} & \mathbf{u}_\tau(y) = N_i(y)F_\tau(x,z)\mathbf{u}_{\tau i} & \\
& \delta\mathbf{u}_s(y) = N_j(y)F_s(x,z)\delta\mathbf{u}_{sj} & \\
\text{2D PLATE :} & \mathbf{u}_\tau(x,y) = N_i(x,y)F_\tau(z)\mathbf{u}_{\tau i}, & i = 1,2,....,N_n \\
& \delta\mathbf{u}_s(x,y) = N_j(x,y)F_s(z)\mathbf{u}_{sj}, & j = 1,2,....,N_n \\
\text{1D SHELL :} & \mathbf{u}_\tau(\alpha,\beta) = N_i(\alpha,\beta)F_\tau(z)\delta\mathbf{u}_{\tau i} & \\
& \delta\mathbf{u}_s(\alpha,\beta) = N_j(\alpha,\beta)F_s(z)\delta\mathbf{u}_{sj} &
\end{array} \tag{19}$$

where N_i and N_j stand for the shape functions, the repeated subscripts i and j indicate summation, N_n is the number of the FE nodes per element and $\mathbf{u}_{\tau i}$ and $\mathbf{u}_{sj}$ are the following vectors of the FE nodal parameters :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbf{u}_{\tau i} & = & \{u_{x_{\tau i}}\ u_{y_{\tau i}}\ u_{z_{\tau i}}\}^T \\
\delta\mathbf{u}_{sj} & = & \{\delta u_{x_{sj}}\ \delta u_{y_{sj}}\ \delta u_{z_{sj}}\}^T
\end{array} \tag{20}$$

For the sake of brevity, the shape functions N_i and N_j are not reported here. They can be found in many reference texts, for instance, in Bathe [51]. However, it should be underlined that the choice of the expansion functions F_τ and F_s is completely independent of the choice of the beam Finite Element (FE) to be used along the beam axis. In this work, when using 1D beam models, classical one-dimensional FEs with four-node (B4) are adopted, i.e. cubic approximation along the y axis is assumed. For the 2D plate and shell models, classical 2D nine-node bi-quadratic FEs (Q9) are adopted for the shape function in the x,y and α,β planes, respectively.

For a better understanding of the proposed models, Fig. 10 shows the approximations previously explained for generic composite structures adopting 1D beam, 2D plate and shell. In particular, the expansion functions F_τ, used to approximate the cross-section of the 1D model and the thickness of the 2D models, and the shape functions N_i for the beam axis and the 2D in-plane approximation, are reported.

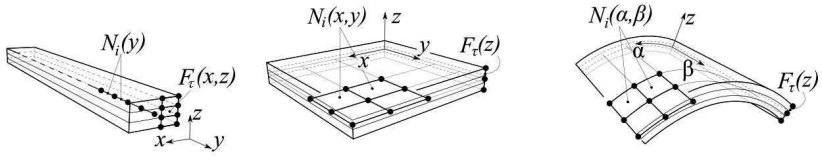


FIGURE 10 – *Mathematical models of the 1D beam , 2D plate and shell of generic composite structures.*

According to LM, the principle of virtual displacements shown in Eq. (2) can be written as :

$$\int_{V_k} (\delta\varepsilon^T \sigma) \mathrm{d}V_k \quad = \quad \delta L_{ext} \tag{21}$$

where k indicates the layer and V_k is the integration domain. Introducing the geometrical relations (Eq. (13)), the constitutive equation (Eq. (14)), and applying CUF (Eq. (15)) and FEM (Eq. ((19)), the following governing equations are obtained :

$$\delta \mathbf{u}^k_{sj} : \ \mathbf{K}^{kij\tau s} \, \mathbf{u}^k_{\tau i} = \mathbf{P}^k_{sj} \tag{22}$$

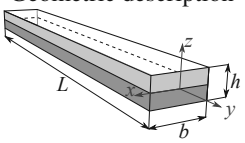
where $\mathbf{K}^{kij\tau s}$ is a 3×3 matrix, called fundamental nucleus (FN) of the mechanical stiffness matrix. The nucleus is the basic building block from which the stiffness matrix of the whole structure is computed. In fact, the construction of the stiffness matrix is formally identical and the explicit form of the elements of FN depends on the adopted formulation. For more information, see the works of Carrera *et al.* [53, 54]. The fundamental nucleus is expanded on the indexes τ and s to obtain the stiffness matrix of each layer k. Then, the matrices of each layer are assembled at the multi-layer level depending on the considered approach. $\mathbf{P}_{sj}$ is a 3×1 array, and it represents the fundamental nucleus of the external load. Its explicit expression is not given here for the sake of brevity, but it can be found in [53, 50] in the case of different loadings.

6. Benchmarks Description

To highlight the capabilities of the proposed ESL FEs based on Lagrange polynomials, four well-known benchmark problems are considered, and they are described hereafter. They regard a beam with two layers (both composite and bi-metallic cases are considered), a three-layer plate, a five-layer sandwich plate and a cylindrical shell.

B1 : Two-layer beam

Geometric description



L/h = 20 and h/b = 0.5

Orthotropic material

E_L/E_T	E_3/E_T	ν_{LT}	ν_{T3}	ν_{L3}	G_{LT}/E_T	G_{T3}/E_T	G_{L3}/E_T
25	1	0.25	0.25	0.25	0.5	0.2	0.2

with stacking sequence : [0°/90°]

Bimetallic isotropic materials

Bottom layer : E_1=210GPa, ν_1=0.3 ; Top layer : E_2=75GPa, ν_2=0.3

Table 1 – B1: Geometrical and material loading properties of the two-layer beam. The reference solution comes from a refined LW model.

The first analysis case is a two-layer beam, as shown in Table 1. The beam is clamped and two different configurations of materials are considered, orthotropic and bi-metallic. The structure is loaded in the transverse z direction by a constant distributed pressure applied at the top of the beam. The pressure has a value of 1000 Pa. The transverse displacement at the tip and two stresses at the midspan are considered. The reference solution comes from a refined LW model.

B2 : Three-layer composite plate

A composite symmetric three-layer plate was analysed as the second example, and its geometric and loading conditions are described in Table 2. The plate is simply supported on its longitudinal edges and it is loaded with a transverse sinusoidal pressure $p = P_z \sin\left(\frac{\pi x}{b}\right)$, with $P_z = 1Pa$. The analysis was originally proposed by Pagano [55] and further investigated by Carrera [56].

B3 : Five-layer composite sandwich plate

A five-layer composite sandwich plate was further analysed. The geometric and loading conditions are described in Table 3. The plate is simply supported and it is loaded with a transverse bi-sinusoidal pressure $p = P_z \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)$, with $P_z = 1000Pa$. This study case is taken from [57] and [58].

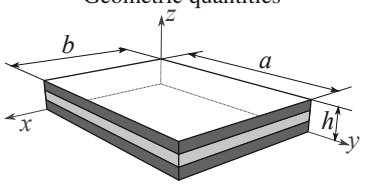
Geometric quantities							
							
b/h = 4 and 10 and a/b = 3							
Material							
E_L/E_T	E_3/E_T	ν_{LT}	ν_{T3}	ν_{L3}	G_{LT}/E_T	G_{T3}/E_T	G_{L3}/E_T
25	1	0.25	0.25	0.25	0.5	0.2	0.5
Stacking sequence							
Three equal layers : [0°/90°/0°]							
Non-dimensional displacements and stresses							
$\overline{w} = \frac{100\, E_T\, w}{\left(\frac{b^4}{h^4}\right) h\, P_z}$		$\overline{\sigma}_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{\left(\frac{b}{h}\right)^2 P_z}$			$\overline{\sigma}_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{\left(\frac{b}{h}\right) P_z}$		

Table 2 – B2: Geometrical and material properties of the three-layer composite plate. The study case is taken from [55].

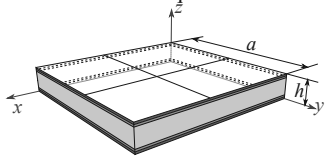
Geometric quantities								
								
a/h = 100, a = b, $h_{Core} = 8mm$, $h_{Skins} = 1mm$								
Material 1 (Skins)								
E_L [GPa]	E_3 [GPa]	E_T [GPa]	ν_{LT}	ν_{T3}	ν_{L3}	G_{LT} [GPa]	G_{T3} [GPa]	G_{L3} [GPa]
50	10	10	0.25	0.25	0.25	5	5	5
Material 2 (Core)								
E_L [MPa]	E_3 [MPa]	E_T [MPa]	ν_{LT}	ν_{T3}	ν_{L3}	G_{LT} [MPa]	G_{T3} [MPa]	G_{L3} [MPa]
0.01	75.85	0.01	0.25	0.25	0.25	22.5	22.5	22.5
Stacking sequence								
Bottom skins : [0°/90°], Top skins : [90°/0°] (each layer has the same thickness)								
Non-dimensional displacements and stresses								
$\overline{w} = \frac{100\, w\, E_T\, h^3}{P_z\, a^4}$		$\overline{\sigma}_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{P_z\left(\frac{a}{h}\right)^2}$			$\overline{\sigma}_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{P_z\left(\frac{a}{h}\right)}$			

Table 3 – B3: Geometrical and material properties of the five-layer composite sandwich plate under distributed bi-sinusoidal. The study case is taken from [57].

B4 : Three-layer composite shell

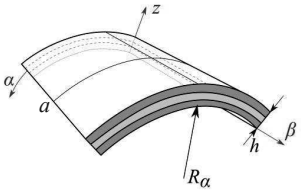
Geometric quantities							
							
$R_\alpha/b = \pi/3$, $R_\alpha/h = 10$ and $a = 1$							
Material							
E_L/E_T	E_3/E_T	ν_{LT}	ν_{T3}	ν_{L3}	G_{LT}/E_T	G_{T3}/E_T	G_{L3}/E_T
25	1	0.25	0.25	0.25	0.5	0.2	0.5
Staking sequence							
Three equal layers : [0°/90°/0°]							
Non-dimensional displacements and stresses							
$\overline{w} = \frac{10\,E_T\,w}{P_z\,h\left(\frac{R_\beta}{h}\right)^4}$ $\quad$ $\overline{\sigma}_{\beta\beta} = \frac{\sigma_{\beta\beta}}{P_z\left(\frac{R_\beta}{h}\right)^2}$ $\quad$ $\overline{\sigma}_{\beta z} = \frac{\sigma_{\beta z}}{P_z\left(\frac{R_\beta}{h}\right)}$							

Table 4 – B4: Geometrical and material properties of the three-layer composite shell. The study case is taken from [54].

As a final study case, a cylindrical shell was considered. The geometric properties and loading conditions are reported in Table 4. The shell is simply supported on its longitudinal edges and it is loaded with a transverse sinusoidal pressure $p = P_z \sin\left(\frac{\pi x}{b}\right)$ at the top position, with $P_z = 1Pa$. The analysis was originally proposed by Ren [59] and further investigated by Carrera [54].

7. Results for ESL Lagrange solutions

The benchmark problems were analyzed numerically and the results are shown in this section. Beam, plate and shell models are used for the static analyses, and values of displacement, axial and shear stress at particular points are calculated and compared with literature and reference results.

B1 : Two-layer beam Preliminary convergence analyses were carried out to set the reference solutions with the LW approach. Both transverse displacements at the tip section and shear stresses at the mid-span were studied. As a consequence, seven B4 FEs on the beam axis were chosen for the cross-ply beam

(see Fig. 11 (a)), whereas twenty B4 elements were adopted for the bi-metallic case (see Fig. 11 (b)). The converged model was used to evaluate displace-

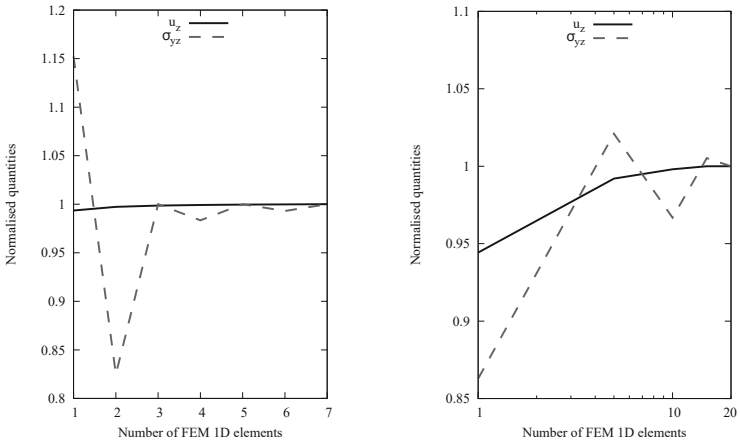


FIGURE 11 – *B1 : Convergence analyses for the two-layer composite (a) and bi-metallic (b) beam.*

Model	$-u_z$	σ_{yy}	σ_{yz} H	σ_{yz} I	DOF
LW(Ref.)	5.263	90.33	23.00	23.04	1848
TBM	5.265	92.38	10.02	23.20	305
EBBM	5.140	92.96	—	23.14	183
LP16	5.240	91.43	15.44	23.05	1056
LP9	5.233	91.35	14.76	23.04	594
LP4	5.131	95.91	10.07	22.87	264

Table 5 – B1: Transverse displacement and shear stresses of two-layer composite beam. $-u_z$ is calculated at the free tip of the beam, σ_{yy} at the mid-span and σ_{yz} at the mid-span of the beam at $z = h/4$.

ment, axial and shear stress components. The results are shown in Table 6 and Figs. 12 and 13. Clearly, a good accuracy for displacement and axial stress is obtained with every theory and LP position, whereas for the shear stress higher-order theories or integrated stresses have to be recalled.

B2 : Three-layer composite plate In this study case, two side-to-thickness

Model	$-u_z$	σ_{yy}	σ_{yz} H	σ_{yz} I	DOF
LW(Ref.)	0.2008	234.8	11.58	13.87	5124
TBM	0.2029	234.8	14.80	15.45	305
EBBM	0.2025	234.4	—	14.72	183
LP16	0.2008	234.7	14.71	13.87	2928
LP9	0.2006	234.9	11.54	13.71	1647
LP4	0.1629	234.8	14.79	14.59	732

Table 6 – B1: Transverse displacement and shear stresses of two-layer bimetallic beam. $-u_z$ is calculated at the free tip of the beam, σ_{yy} at the mid-span and σ_{yz} at the mid-span of the beam at $z = h/4$.

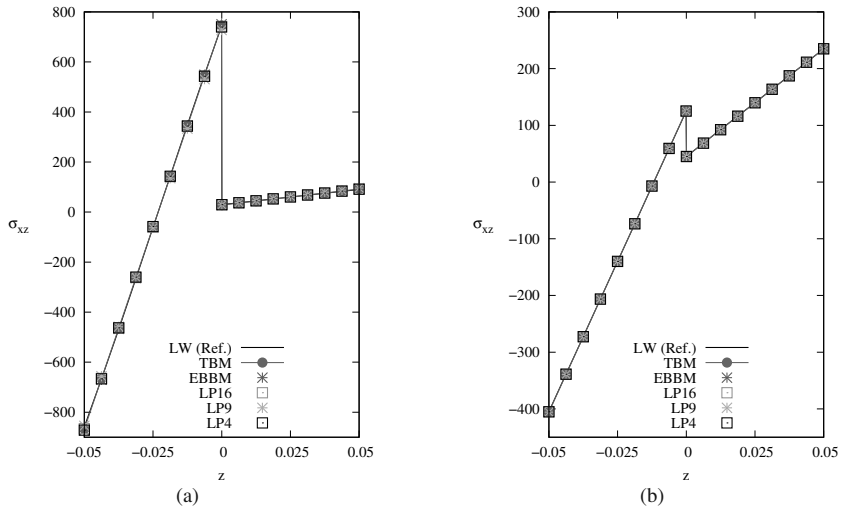


FIGURE 12 – *B1 : In-plane stress of clamped two-layer composite beam (a) and two-layer bimetallic beam (b).*

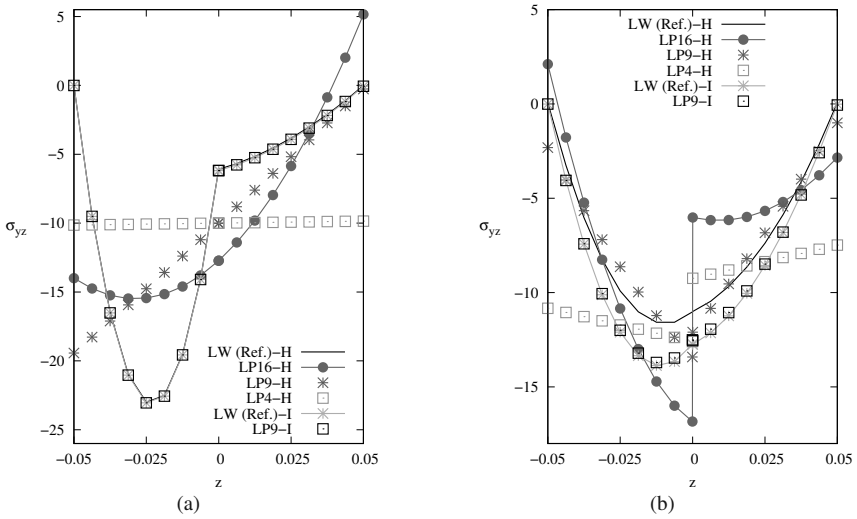


FIGURE 13 – *B1 : Shear stress of clamped two-layer composite beam (a) and two-layer bimetallic beam (b).*

ratios equal to 4 and 10 are considered. Transverse displacements, in-plane and shear stresses were studied using ESL Lagrange and comparing the results with the analytical reference solution from [55]. Regarding transverse displacements, some differences arise for each theory, especially for lower-order theories (as displayed in Table 7). Accurate results can be obtained for in-plane stresses (see Table 7 and Fig. 14) for both considered thicknesses. However, some issues are found for side-to-thickness ratio equal to 4 and LP3 and LP2. Considering shear stresses, critical issues can be seen, as displayed in Table 7 and Fig. 15. Using Hooke's Law, the results differ from the reference solution, even though LP6 and LP7 are closer to the analytical solution. This problem can be overcome if stress recovery is adopted (see Fig. 15).

B3 : Five-layer composite sandwich plate. For the third benchmark problem, a sandwich structure was considered to underline the potentialities and drawbacks of ESL approach. Accurate results for transverse displacements can be obtained at the top position (some issues surge only for low-order LP2 and LP3). However, it is not possible to obtain the same distribution as the reference solution (see Table 8 and Fig. 16 (a)), even if a higher number of LPs

b/h	4	10	4	10	4	10	
Model	$\overline{u}_z$		$\overline{\sigma}_{xx}$		$\overline{\sigma}_{xz}$ (H)		DOF
Ref.	2.820	0.919	1.176	0.725	0.358	0.420	—
FSDT	2.078	0.757	0.628	0.631	0.164	0.165	1085
CLT	0.504	0.504	0.627	0.629	—	—	651
LP7	2.704	0.888	1.130	0.724	0.327	0.388	4557
LP6	2.703	0.888	1.131	0.724	0.326	0.388	3906
LP5	2.652	0.867	1.130	0.718	0.289	0.315	3255
LP4	2.653	0.867	1.130	0.718	0.289	0.315	2604
LP3	2.057	0.753	0.653	0.628	0.162	0.164	1953
LP2	2.076	0.754	0.626	0.628	0.164	0.164	1302

Table 7 – B2: Transverse displacement, in-plane and shear stresses of simply supported three-layer composite plate under sinusoidal pressure. Comparison between different ratios *b/h*. $\overline{u}_z$ and $\overline{\sigma}_{xx}$ are calculated in the middle, σ_{xz} is calculated at *x/4*, *y/4*, *z/2*. Ref. solution comes from [55].

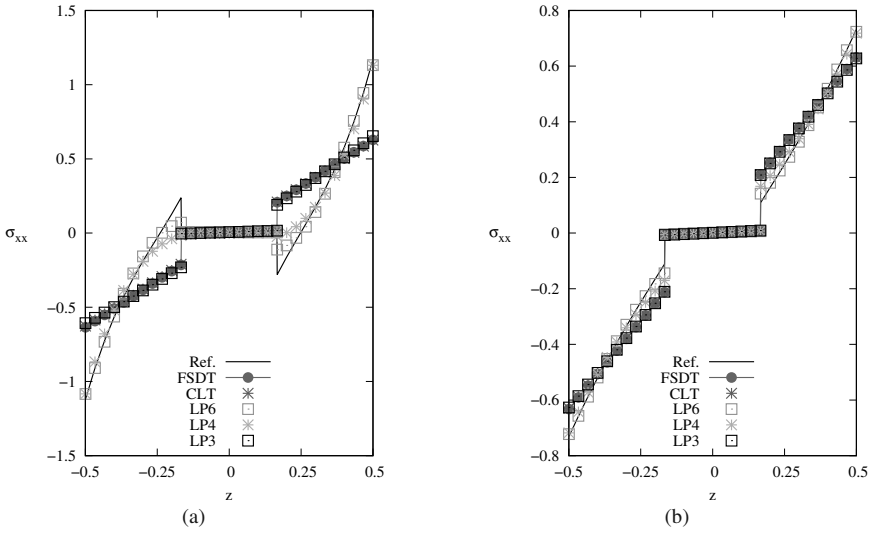


FIGURE 14 – *B2 : In-plane stresses for three-layer composite plate. b/h=4 (a) and b/h=10 (b) cases. Ref. solution comes from [55].*

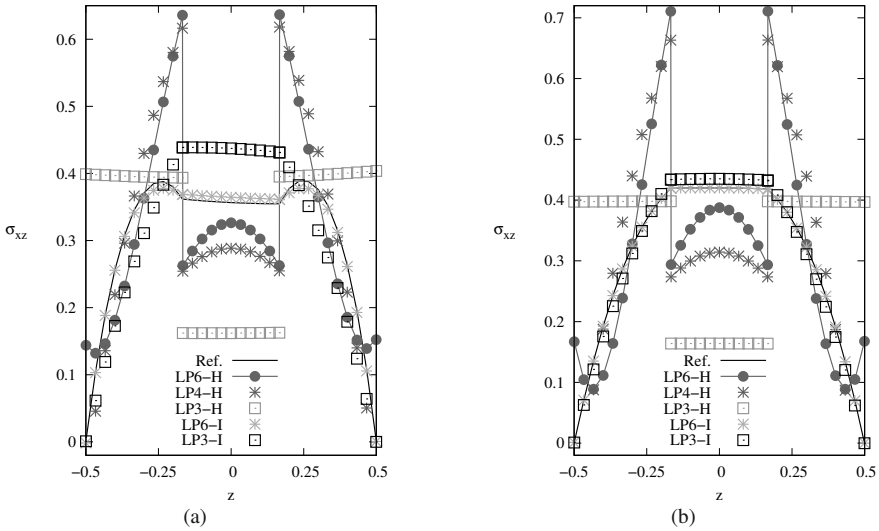


FIGURE 15 – *B2 : Shear stresses for three-layer composite plate. b/h=4 (a) and b/h=10 (b) cases. Ref. solution comes from [55].*

is employed. In Table 8 in-plane stresses are shown, and each theory leads to results close to the reference solution. Some problems arise when evaluating shear stresses, and using more LPs along the thickness can improve the solution (see Table 8 and Fig. 16 (b)), but the ESL is not capable of describing an accurate distribution within the skins. Thence, the ESL cannot evaluate the correct distribution over the thickness and a LW approach is compulsory.

B4 : Three-layer composite shell Finally, a shell study case was considered. Clearly, transverse displacements and in-plane stresses (shown in Table 9 and in Fig. 18 (a)) can be obtained with a good degree of precision, while increasing with the number of employed LPs.

Model	$\overline{w}$	$\overline{\sigma}_{xx}$	$\overline{\sigma}_{xz}$	DOF
Ref.	3.1167	-0.7819	0.1825	27783
FSDT	2.9330	-0.7955	0.0040	2205
CLT	2.9209	-0.7592	—	1323
LP7	3.1078	-0.7730	0.2290	9261
LP6	3.1078	-0.7727	0.2290	7938
LP5	3.0203	-0.7766	0.0918	6615
LP4	3.0203	-0.7765	0.0918	5292
LP3	2.9330	-0.7671	0.0041	3649
LP2	2.8127	-0.7629	0.0040	2646

Table 8 – B2: Transverse displacement, in-plane and shear stresses of the five-layer composite sandwich plate. $\overline{w}$ calculated in the middle of the plate at the top skin, $\overline{\sigma}_{xx}$ calculated in the middle of the plate at the bottom skin, $\overline{\sigma}_{xz}$ calculated at a quarter of the plate in the middle of the core. Ref. solution comes from [57].

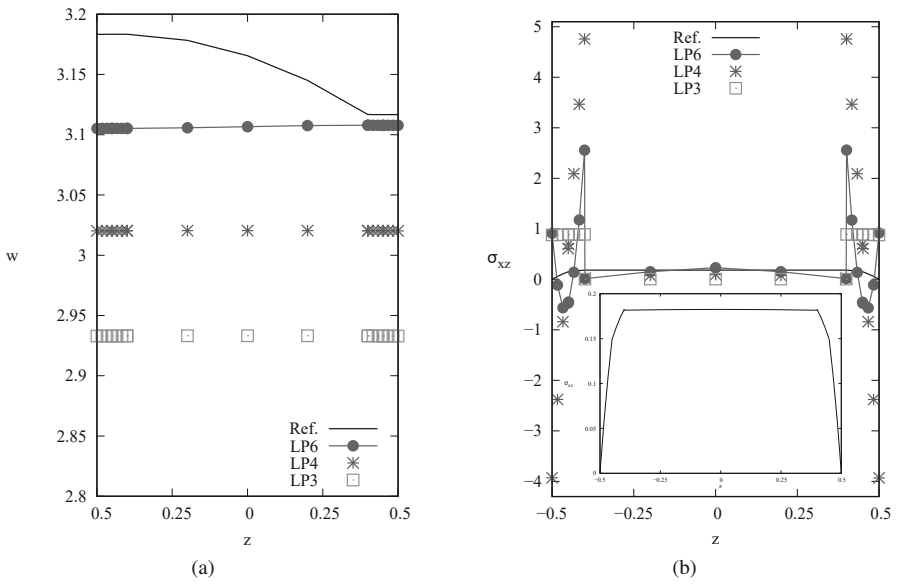


FIGURE 16 – *B3 : Transverse displacement (a) and shear stress (b) of five-layer composite sandwich. Ref. solution comes from [57].*

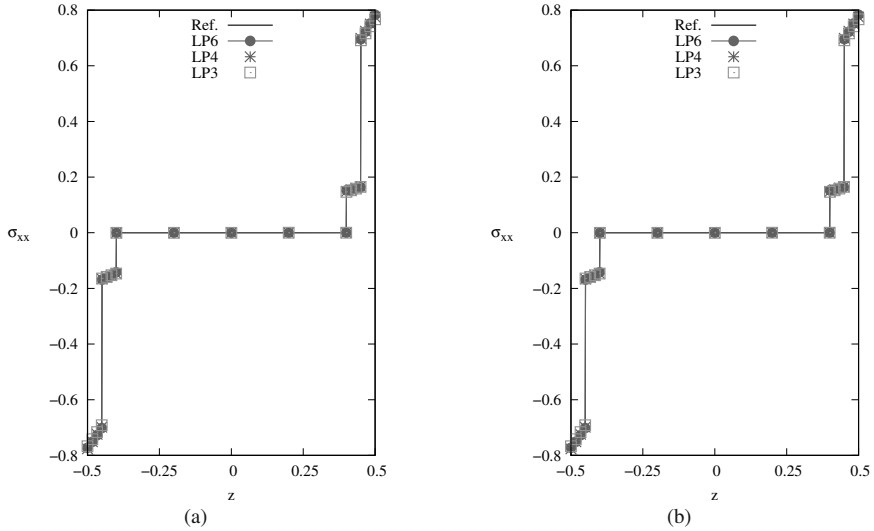


FIGURE 17 – *B3 : Transverse displacement (a) and shear stress (b) of five-layer composite sandwich. Ref. solution comes from [57].*

Model	$\overline{u}_z$	$\overline{\sigma}_{\beta\beta}$	$\overline{\sigma}_{\beta z}$ H	$\overline{\sigma}_{\beta z}$ I	DOF
Ref.	0.144	0.897	—	0.525	—
FSDT	0.112	0.721	0.184	0.519	875
CLT	0.076	0.709	—	0.500	525
LP7	0.139	0.875	0.476	0.527	3675
LP6	0.139	0.875	0.476	0.527	3150
LP5	0.136	0.868	0.382	0.533	2625
LP4	0.136	0.869	0.382	0.533	2100
LP3	0.119	0.766	0.196	0.545	1575
LP2	0.119	0.766	0.196	0.545	1050

Table 9 – B4: Transverse displacement, in-plane and shear stresses of simply supported three-layer composite shell under sinusoidal pressure. $\overline{u}_z$ calculated in the middle of the shell, $\overline{\sigma}_{\beta\beta}$ calculated in the middle of the shell at the top surface and $\overline{\sigma}_{\beta z}$ calculated at a quarter at the top surface. Ref. solution comes from [59].

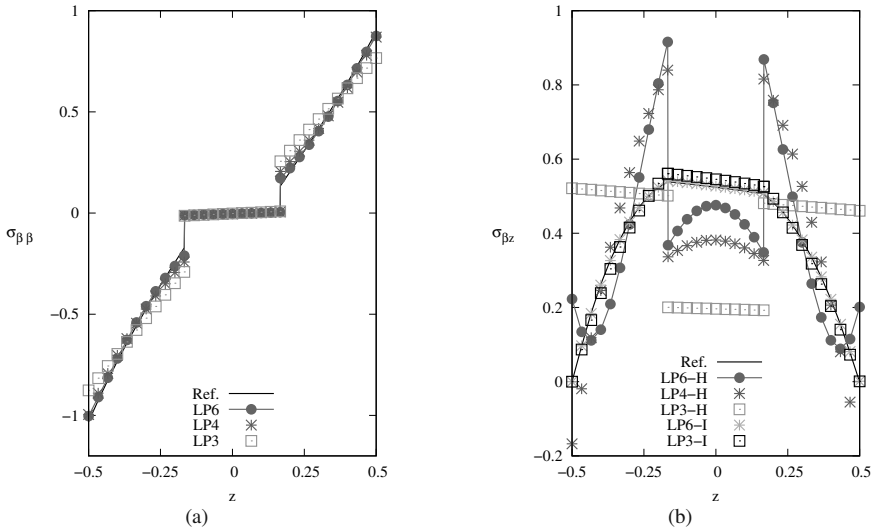


FIGURE 18 – *B4 : In-plane (a) and shear stress (b) of simply supported three-layer composite shell under sinusoidal pressure. Ref. solution comes from [59].*

As far as the shear stresses are considered (see Fig. 18 (b)), reliable results can be obtained in the middle point. However, the overall distribution is not as accurate as the reference one.

8. Special capabilities of Lagrange Expansion

The capability of the proposed ESL approach to deal with physical boundary conditions and global/local applications is proposed in this section with practical examples.

Physical boundary conditions on different nodes

This example shows how it is possible to decide the boundary conditions by using the Lagrange expansion in a general way. In Fig. 19, the cases of classical and Lagrange models are considered.

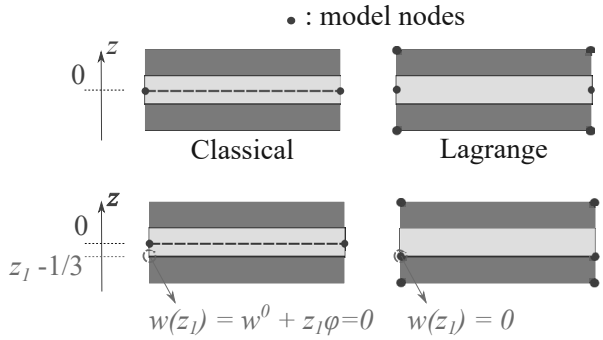


FIGURE 19 – *Computational models for Taylor and Lagrange (ESL approach) Expansions.*

Clearly, if boundary conditions have to be used to the middle line, both classical and Lagrange models can deal with it in an automatic manner. On the contrary, if the boundary conditions need to be applied at another point (in Fig. 19 at $z = 1/3$), classical models need to include an additional equation for the resolution of the problem, which is reported in Eq. (23).

$$w(z_1) = w^0 + z_1\phi = 0 \tag{23}$$

That additional equation can be included in the model using Lagrange multipliers, expressed by the following

$$\Pi = \lambda^{\mathrm{T}}\mathbf{Bq}$$

Thence, the following linear system has to be adopted.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Thus, new unknowns have to be added to the displacement ones and the stiffness matrix has to be modified (for more information about Lagrange multipliers in CUF framework, interested readers are referred to [44]). This matrix also has the major drawback of not being necessarily positive definite and numerical problems can surge. On the contrary, Lagrange models can automatically include the boundary condition thanks to their capability to move the LPs, so it is necessary to have a point in correspondence of the desired location.
To highlight this capability, two different simply-supported conditions are considered (see figure 20). First, the condition is used at the bottom layer at

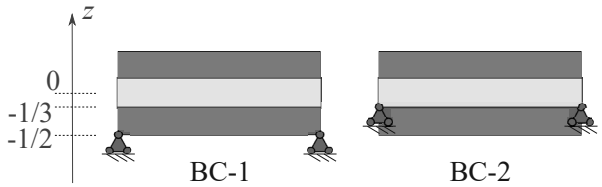


FIGURE 20 – *Scheme of two different boundary conditions used for three-layer composite plate to demonstrate the capabilities of LPs.*

$z = -1/2$ over the longitudinal edge. The second one is used at the interface layer at $z = -1/3$. The ESL theories are compared with LW reference theory in Tab. 10 and it can be seen how results can be obtained for both conditions, without losing accuracy with respect to the LW model. In particular, good results

Conditions		BC-1			BC-2		
Model	DOF	$\overline{u}_z$	$\overline{\sigma}_{xx}$	$\overline{\sigma}_{xz}$	$\overline{u}_z$	$\overline{\sigma}_{xx}$	$\overline{\sigma}_{xz}$
LW(Ref.)	12369	0.617	0.656	0.307	0.611	0.655	0.307
LP7	4557	0.610	0.656	0.281	0.604	0.655	0.281
LP6	3906	0.610	0.653	0.281	0.604	0.653	0.281
LP5	3255	0.604	0.653	0.224	0.579	0.652	0.224
LP4	2604	0.604	0.652	0.224	0.579	0.652	0.224
LP3	1953	0.573	0.628	0.115	0.568	0.628	0.115

Table 10 – Transverse displacement, in-plane and shear stresses of simply supported three-layer composite plate (aspect ratio equals to 20). Comparison between different boundary conditions used. $\overline{u}_z$ and $\overline{\sigma}_{xx}$ are calculated in the middle, $\overline{\sigma}_{xz}$ is calculated at x/4, y/4, z/2, see Table 2 for the adopted nondimensional values. LW in composed of six LP4.

are obtained for transverse displacements and in-plane stresses.

Global/Local method with ESL Lagrange for sandwich plate

An application of the capability of the Lagrange models of using different boundary conditions (see Fig. 19) is a single-step global/local approach. When dealing with different mathematical models, the main issue is to connect the two domains. Figure 21 describes this issue. In particular, Fig. 21(a) displays LW and classical domains and due to the difference of the mathematical approaches, four additional equations have to be added to the system of equation (similarly to what is shown in Fig. 19 and Eq. (23)). For instance, Carrera *et al.*

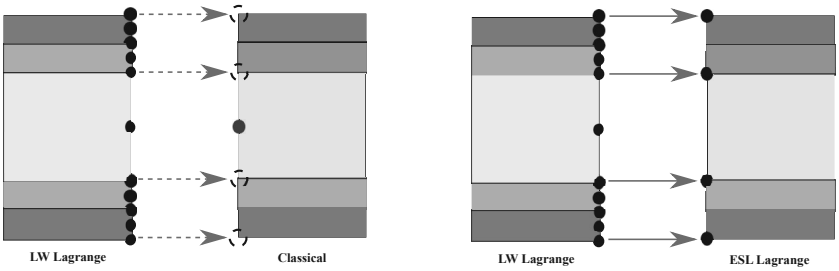


FIGURE 21 – *Example of joining different structural domains. Between classical and LW Lagrange-based zones, there are no connection points (a), whereas one can opportunely choose the position of LPs to join different domains (b).*

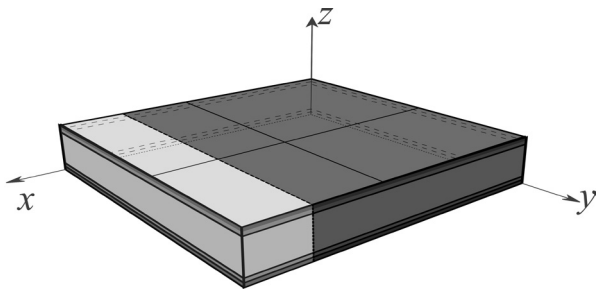


FIGURE 22 – *Example of the single-step global/local approach applied to the five-layer sandwich plate. ESL approach was used in the dark grey part and the LW approach in the light grey part.*

[44, 45, 50] used the Lagrange Multipliers to overcome this problem. On the contrary, the ESL models shown in this work, allows for the arbitrary use of LPs, so that a point-by-point connection can be ensured between the domains, as shown in Fig. 21(b). This procedure is hereafter applied on the five-layer composite sandwich plate, as illustrated in Fig. 22, where the ESL approach was used in the dark grey part and the LW approach in the light grey part. The results are shown in Table 11, where the upper scripts indicate the number of employed FEs. The capability to obtain accurate results is shown, especially for

Model	$\overline{w}$	$\overline{\sigma}_{xx}$	$\overline{\sigma}_{xz}$	DOF
LW	3.1167	-0.7819	0.1825	27783
LP6	3.1078	-0.7727	0.2290	7938
LP4	3.0203	-0.7765	0.0918	5292
$LW^{\times 20}$-$LP6^{\times 80}$	3.1150	-0.7829	0.1576	12663
$LW^{\times 30}$-$LP6^{\times 70}$	3.1180	-0.7758	0.1704	14553
$LW^{\times 20}$-$LP4^{\times 80}$	3.0367	-0.7725	0.1665	10647
$LW^{\times 30}$-$LP4^{\times 70}$	3.0510	-0.7624	0.1764	12789

Table 11 – Transverse displacement, shear and normal stresses of the fivelayer composite sandwich plate. $\overline{w}$ calculated in the middle of the plate at the top skin (ESL domain), $\overline{\sigma}_{xx}$ calculated in the middle of the plate at the bottom skin (ESL domain), $\overline{\sigma}_{xz}$ calculated at a quarter of the plate in the middle of the core. LW is composed of five LP5. Comparison with Global Local Solution.

the shear stresses, with fewer DOFs than the LW solution. In particular, transverse displacements and shear stresses for the combinations $LW^{\times 30}$-$LP6^{\times 70}$ $LW^{\times 30}$-$LP4^{\times 70}$ and LW are displayed in Fig. 23.

9. Conclusions

The present research work proposed Equivalent Single Layer Finite Elements based on the Lagrange polynomials for the static analysis of beams, plates and shells. One-dimensional beams and two-dimensional plate and shell models were built in the framework of the Carrera Unified Formulation. Four well-known case studies were taken from open literature, and the results obtained with the developed ESL FEs were compared with those from Layer-Wise models and references. The following main conclusions can be summarized:

1 ESL FE models based on Lagrange polynomials lead to increasingly accurate results, as the number of LPs increases, compared to LW models. This is true for both transverse displacements and in-plane stresses.

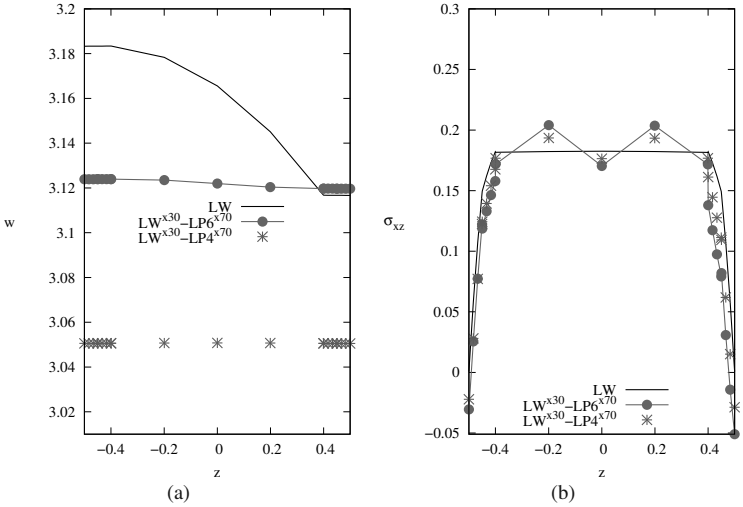


FIGURE 23 – *Transverse displacement (a) and shear stress (b) of five-layer composite sandwich. LW is composed of five LP5. Comparison with Global Local Solution.*

Less accurate results are obtained for shear components (unless they are evaluated integrating the three-dimensional (3D) indefinite equilibrium equations, rather than with Hooke's law).

2 The application of Lagrange Points (LPs) and the fact that unknowns are pure displacements allows implementing boundary conditions which are closer to the ones used in practical applications.

3 The use of Lagrange polynomials leads to a single-step global/local procedure without implementing any additional constraint equation (as it happens in classical models). This method allows for an accurate evaluation of both in-plane and shear stresses when compared with LW models with a significant decrease of computational cost with respect to the use of traditional models and Lagrange multipliers.

Bibliography

[1] E. Carrera, *Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells*, Applied Mechanics Review, 56(3), 2003, pp. 287-308.

[2] R.K. Kapania, S. Raciti, *Recent advances in analysis of laminated beams and*

plates. Part I: *Shear effects and buckling*, AIAA Journal, 27(7), pp. 923-935, 1989.

[3] R.K. Kapania and S. Raciti, *Recent advances in analysis of laminated beams and plates.* Part II: *Vibrations and wave propagation*, AIAA Journal, 27(7), 1989, pp. 935-946.

[4] J.N. Reddy and D.H. Robbins, *Theories and Computational Models for Composite Laminates*, Applied Mechanics Reviews, 47(6), 1994, pp. 147-169.

[5] E. Carrera, *Developments, ideas, and evaluations based upon reissner's mixed variational theorem in the modeling of multilayered plates and shells*, Applied Mechanics Review, 54(4), 2001, pp. 301-329.

[6] L. Euler, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*, vol. 1. Springer Science & Business Media, Berlin 1952.

[7] S.P. Timoshenko, *On the transverse vibrations of bars of uniform cross section*, Philosophical Magazine, 43, 1922, pp. 125-131.

[8] V.V. Novozhilov, *Theory of elasticity*, Pergamon Press, Oxford 1961.

[9] V.Z. Vlasov, *Thin-walled elastic beams*, Office of Technical Services, US Department of Commerce, Washington DC 1961.

[10] R.D. Ambrosini, J.D. Riera, R.F. Danesi, *A modified vlasov theory for dynamic analysis of thin-walled and variable open section beams*, Engineering Structures, 22(8), 2000, pp. 890-900.

[11] I. Mechab, N. El Meiche, F. Bernard, *Analytical study for the development of a new warping function for high order beam theory*, Composites Part B: Engineering, 119, 2017, pp. 18-31.

[12] P.O. Friberg, *Beam element matrices derived from vlasov's theory of open thin-walled elastic beams*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 21(7), 1985, pp. 1205-1228.

[13] R. Schardt, *Eeine erweiterung der technischen biegetheorie zur berechnung prismatischer faltwerke*, Der Stahlbau, 35, 1966, pp. 161-171.

[14] N. Peres, R. Gonçalves, D. Camotim, *First-order generalised beam theory for curved thin-walled members with circular axis*, Thin-Walled Structures, 107, 2016, pp. 345-361.

[15] N. Silvestre, *Generalised beam theory to analyse the buckling behaviour of circular cylindrical shells and tubes*, Thin-Walled Structures, 45(2), 2007, pp. 185-198.

[16] G. Kirchhoff, *Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe*, *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 40, 1850, pp. 51-88.

[17] A.E.H. Love, *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, Cambridge University Press, Cambridge 1927.

[18] E. Reissner and Y. Stavsky, *Bending and stretching of certain types of heterogeneous aeolotropic elastic plates*, Journal of Applied Mechanics, 28, 1961, pp. 402-408.

[19] E. Reissner, *The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates*, Journal of Applied Mechanics, 12, 1945, pp. 69-77.

[20] R. Mindlin, *Influence of rotary inertia and shear flexural motion of isotropic, elastic plates*, Journal of Applied Mechanics, 18, 1951, pp. 31-38.

[21] J.N. Reddy, *A simple higher-order theory for laminated composite plates*, Journal of Applied Mechanics, 51, 1984, pp. 745-752.

[22] E. Carrera, *Evaluation of layerwise mixed theories for laminated plates analysis*, AIAA Journal, 36(5), 1998, pp. 830-839.

[23] F.G. Rammerstorfer, K. Dorninger, A. Starlinger, *Composite and sandwich shells*, in F.G. Rammerstorfer, *Nonlinear analysis of shells by finite elements*, Springer, 1992, pp. 131-194.

[24] J.N. Reddy, *An evaluation of equivalent-single-layer and layerwise theories of composite laminates*, Composite structures, 25(1-4), 1993, pp. 21-35.

[25] A.S. Mawenya and J.D. Davies, *Finite element bending analysis of multilayer plates,* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 8(2), 1974, pp. 215-225.

[26] A.K. Noor and W.S. Burton, *Assessment of computational models for multilayered composite shells*, Applied Mechanics Reviews, 43, 1990, pp. 67-97.

[27] E. Carrera, *A class of two-dimensional theories for anisotropic multilayered plates analysis*, Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, 19-20, 1995-96, pp. 49-57.

[28] E. Carrera and A. Robaldo, *Extension of Reissner mixed variational principle to thermopiezelasticity*, Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, 141, 2007, pp. 3-18.

[29] A.S.D. Wang and F.W. Crossman, *Calculation of edge stresses in multilayer laminates by sub-structuring*, Journal of Composite Materials, 12(1), pp. 76-83, 1978.

[30] N.J. Pagano and S.R. Soni, *Global-local laminate variational model*, International Journal of Solids and Structures, 19(3), 1983, pp. 207-228.

[31] R. Jones, R. Callinan, K.K. Teh, K.C. Brown, *Analysis of multi-layer laminates using three-dimensional super-elements*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 20(3), 1984, pp. 583-587.

[32] M.B. Dehkordi, M. Cinefra, S.M.R. Khalili, E. Carrera, *Mixed LW/ESL*

models for the analysis of sandwich plates with composite faces, Composite Structures, 98, 2013, pp. 330-339.

[33] E. Carrera and S. Valvano, *Analysis of laminated composite structures with embedded piezoelectric sheets by variable kinematic shell elements*, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 28(20), 2017, pp. 2959-2987.

[34] A. Pagani, E. Carrera, R. Augello, D. Scano, *Use of Lagrange polynomials to build refined theories for laminated beams, plates and shells*, Composite Structures, 276, 2021, p. 114505.

[35] E. Carrera, G.A. Fiordilino, M. Nagaraj, A. Pagani, M. Montemurro, *A global/local approach based on cuf for the accurate and efficient analysis of metallic and composite structures*, Engineering Structures, 188, 2019, pp. 188-201.

[36] K.M. Mao and C.T. Sun, *A refined global-local finite element analysis method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 32(1), 1991, pp. 29-43.

[37] E. Carrera, A. Garcia de Miguel, G.A. Fiordilino, A. Pagani, *Global/local analysis of free-edge stresses in composite laminates*, in AIAA Scitech 2019 Forum, pp. 1-7.

[38] E. Carrera, A.G. de Miguel, M. Filippi, I. Kaleel, A. Pagani, M. Petrolo, E. Zappino, *Global-local plug-in for high-fidelity composite stress analysis in Femap/NX Nastran*, Mechanics of Advanced Materials and Structures, 28(11), 2021 pp. 1121-1127.

[39] H.B. Dhia, *Problèmes mécaniques multi-échelles: la méthode arlequin*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences – Series IIB – Mechanics-Physics-Astronomy, 326(12), 1998, pp. 899-904.

[40] H.B. Dhia and G. Rateau, *The arlequin method as a flexible engineering design tool*, International journal for numerical methods in engineering, 62(11), 2005, pp. 1442-1462.

[41] F. Biscani, G. Giunta, S. Belouettar, E. Carrera, H. Hu, *Variable kinematic beam elements coupled via arlequin method*, Composite Structures, 93(2), 2011, pp. 697-708.

[42] F. Biscani, G. Giunta, S. Belouettar, E. Carrera, H. Hu, *Variable kinematic plate elements coupled via arlequin method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 91(12), 2012, pp. 1264-1290.

[43] Q.Z. He, H. Hu, S. Belouettar, G. Guinta, K. Yu, Y. Liu, F. Biscani, E. Carrera, M. Potier-Ferry, *Multi-scale modelling of sandwich structures using hierarchical kinematics*, Composite Structures, 93(9), 2011, pp. 2375-2383.

[44] E. Carrera, A. Pagani, M. Petrolo, *Use of Lagrange multipliers to combine 1d variable kinematic finite elements*, Computers & Structures, 129, 2013, pp. 194-206.

[45] E. Carrera and E. Zappino, *Analysis of complex structures coupling variable kinematics one-dimensional models*, in ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, volume 46421, pp. 1-8. American Society of Mechanical Engineers, 2014.

[46] K. Washizu, *Variational methocs in elasticity and plasticity*, Pergamon Press, Oxford 1968.

[47] E. Carrera, *Transverse Normal Stress Effects in Multilayered Plates*, Journal of Applied Mechanics, 66(4), 1999, pp. 1004-1012.

[48] E. Carrera, M. Petrolo, *Refined beam elements with only displacement variables and plate/shell capabilities*, Meccanica, 47(3), 2012, pp. 537-556.

[49] E. Carrera, A. Pagani, S. Valvano, *Shell elements with through-the-thickness variable kinematics for the analysis of laminated composite and sandwich structures*, Composites Part B: Engineering, 111, 2017, pp. 294-314.

[50] E. Carrera, M. Cinefra, M. Petrolo, E. Zappino, *Finite element analysis of structures through unified formulation*, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey 2014.

[51] K.J. Bathe, *Finite Element Procedure*, Prentice hall, Upper Saddle River, New Jersey 1996.

[52] T.J.R. Hughes, *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis,* Courier Corporation, Chelmsford, Massachusetts 2012.

[53] E. Carrera, G. Giunta, M. Petrolo, *Beam structures: classical and advanced theories*, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey 2011.

[54] E. Carrera, *Theories and finite elements for multilayered plates and shells: a unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking,* Archives of Computational Methods in Engineering, 10(3), 2003, pp. 215-296.

[55] N.J. Pagano, *Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending*, Journal of Composite Materials, 3(3), 1969, pp. 398-411.

[56] E. Carrera, *Single* vs *multilayer plate modelings on the basis of Reissner's mixed theorem*, Aiaa Journal-AIAA J, 38, 2000, pp. 342-352.

[57] A. Pagani, S. Valvano, and E. Carrera, *Analysis of laminated composites and sandwich structures by variable-kinematic MITC9 plate elements*, Journal of Sandwich Structures & Materials, 20(1), 2018, pp. 4-41.

[58] M. Petrolo and A. Lamberti, *Axiomatic/asymptotic analysis of refined layer-wise theories for composite and sandwich plates*, Mechanics of Advanced Materials and Structures, 23(1), 2016, pp. 28-42.

[59] J.G. Ren, *Exact solutions for laminated cylindrical shells in cylindrical bending*, Composites Science and Technology, 29(3), 1987, pp. 169-187.

Classe di Scienze morali, storiche e filologiche

Acc. Sc. Torino
Memorie 1 (2022), 137-191

La «Revue Encyclopédique» (1819-1835): biografia di una rivista fra tre rivoluzioni

Alessandra Foresto Lo Piano

Memoria presentata dal Socio nazionale Giuseppe Ricuperati
nell'adunanza del 12 aprile 2022, ricevuta il 29 aprile 2022
e approvata nell'adunanza del 14 giugno 2022

Abstract. *The founder of the review, Marc-Antoine Jullien de Paris, was a follower of Robespierre since the 1789 Revolution; as a republican he was removed from politics under the Empire and devoted himself to pedagogical studies. He founded the «Revue Encyclopédique» in 1819 during the Restoration, to provide moral guidance to his nation.*
Disappointed by the revolution of July 1830, which he considered as a «demi-restauration»; after the bankruptcy he handed over the review to the Saint-Simonians Hippolyte Carnot and Pierre Leroux. Leroux dealed with the social question, posed by the emergence of the working class, oppressed by the bourgeoisie who emerged victorious from the two revolutions. The republican and socialist ideology, to which the review explicitly refers, caused its closure in 1835.

Keywords: Restoration, «Revue encyclopédique».

Riassunto. *Il fondatore della rivista, Marc-Antoine Jullien de Paris, è seguace di Robespierre dalla Rivoluzione del 1789; come repubblicano è allontanato dalla politica sotto l'Impero e si dedica a studi pedagogici. Fonda la «Revue Encyclopédique» nel 1819 durante la Restaurazione, per fornire una guida morale alla propria nazione.*
Deluso dalla rivoluzione del Luglio 1830, che vede come una «demi-restauration», subisce la bancarotta ed è costretto a cedere la rivista ai sansimoniani Hippolyte Carnot e Pierre Leroux. Leroux affronta la questione sociale, posta dall'emergere della classe operaia, oppressa dalla borghesia uscita vincitrice dalle due rivoluzioni. L'ideologia repubblicana e socialista, cui la rivista si richiama esplicitamente, ne causa la chiusura nel 1835.

Parole chiave: Restaurazione, «Revue encyclopédique».

Premessa

La «Revue Encyclopédique» è edita a Parigi tra il 1° gennaio 1819 e il marzo 1835, e contribuisce alla formazione della tradizione laica della Francia. Essa rielabora infatti l'eredità del 1789 nel porre le basi dell'ideologia repubblicana e di quella socialista, che ispireranno la storia dei due secoli successivi, e, nel breve periodo, condurranno alla rivoluzione del 1830 e a quella del 1848.

Il fondatore della rivista, Marc-Antoine Jullien de Paris, è un borghese convertitosi al giacobinismo; nostalgico degli ideali del suo passato, manterrà sempre salda la fede nella Repubblica. Pierre Leroux, che gli succederà alla guida della rivista nel 1831, si impegna a portare a compimento la rivoluzione iniziata nel 1789 nel senso dell'egualitarismo sociale, e sarà eletto con i socialisti che, per la prima volta nella storia, entrano alla Camera nel 1848.

Alla «Revue Encyclopédique» spetta così il merito di aver preparato anche la terza rivoluzione che ebbe luogo in Francia nel giro di sessant'anni: lo stesso Jullien, prima di morire, indica in essa l'esito inevitabile della «monarchia borghese» di Luigi Filippo. Ma il ponte ideale che unisce le rivoluzioni in Francia nell'arco di un secolo si estende anche a quella che ha dato origine alla Terza Repubblica: Pierre Leroux muore a Parigi al sorgere della Comune, nei primi giorni di aprile del 1871.

1. Ascesa e tramonto di un rivoluzionario

«Marc-Antoine Jullien non ha mai cessato di essere un rivoluzionario e un repubblicano»; con queste parole Jacques Godechot conclude la sua *Presentazione* della biografia di Marc-Antoine Jullien scritta da Carlo Pancera[1]. Ora, se si attribuisce il termine 'rivoluzionario' al Jullien 'terrorista', la sua carriera terminò con la fine di Robespierre; ma se si riconosce che la fedeltà all'idea repubblicana sotto il Direttorio, l'Impero e la Restaurazione, fu un elemento rivoluzionario per l'epoca, allora Jullien, «l'uomo della lotta aperta dalla Bastiglia alle barricate del 1830»[2], lo è stato fino alla morte.

---

[1] Cfr. J. Godechot, *Presentazione*, in C. Pancera, *Una vita tra politica e pedagogia. Marc-Antoine Jullien de Paris (1775-1848)*, Schena, Fasano (BR) 1994, p. 10. Godechot sottolinea l'importanza di un'opera che raccoglie molti documenti dispersi, e che si occupa delle vicende di un intellettuale che, rispetto a quelle ben più numerose degli uomini d'arme, hanno avuto «molta più influenza sulla loro epoca e soprattutto sull'avvenire dell'Europa».

[2] M. Battaglini, *Marc-Antoine Jullien Segretario Generale della Repubblica Napoletana. Lettere e documenti*, Vivarium, Napoli 1997, cfr. *Prefazione*, pp. VIII ss.

Lo spirito repubblicano francese, come sottolinea Nicolet, ha conosciuto una concreta e storica legittimazione nella Rivoluzione con la proclamazione della Repubblica, il 22 settembre 1792, e con il regicidio, il 20 gennaio 1793, e il partito repubblicano si è sempre pensato ed affermato come il vero *fils de la Révolution*. Ma per i repubblicani di diverse tendenze la Rivoluzione è più di un punto di partenza, «c'est à la fois un modèle, un évangile, une référence historique et surtout un mode d'etre»[3]. Perciò, parafrasando Roger Garaudy, il repubblicanesimo potrebbe essere considerato, dal punto di vista storico-politico, ciò che il materialismo è stato per la filosofia, quel «point d'aboutissement de trois siècles de lutte contre le *droit divin*», quale «condition de toute action révolutionnaire»[4].

1.1. *Devoto di Robespierre e della Costituzione*

Nato a Parigi il 10 marzo 1775, Jullien si vota ben presto alla causa della Rivoluzione: il 1789 lo vede, quattordicenne, nell'attività di volantinaggio per chiedere l'abolizione della monarchia; nel 1792 è introdotto dal padre, fervente repubblicano e membro della Convenzione, alle assemblee della *Société des Amis de la Constitution*; diventa seguace di Robespierre, a favore della cui politica si pronuncia in alcuni interventi pubblici nel club giacobino della capitale.

Da questo momento inizia la scalata al potere: grazie alle relazioni familiari, e in seguito alla dichiarazione di ostilità delle potenze monarchiche alla Francia, a metà del 1792 Jullien riceve l'incarico di *élève diplomate* a Londra, quale informatore di Condorcet, presidente dell'Assemblea Legislativa. Tale incarico è all'apice di una diplomazia parallela a quella del ministro degli Esteri Talleyrand – ancora legato alla politica settecentesca degli equilibri – con lo scopo ultimo, in vista dell'opzione bellica, di «esportare la rivoluzione» facendo leva sul sentimento filo-francese dell'opinione pubblica più progressista. Fallita la missione, dalla fine del 1792 ottiene incarichi militari, quale quello di *commissaire des guerres* presso l'armata dei Pirenei orientali per il reclutamento delle truppe; l'impegno militare si accompagna alla propaganda politica – che lo vede schierato a favore di Robespierre per l'accentramento istituzionale – contro la fazione girondina

---

[3] C. Nicolet, *L'idée républicaine en France. Essai d'histoire critique*, Gallimard, Paris 1982, pp. 83-85.

[4] Cfr. R. Garaudy, *Les sources francaises du socialisme scientifique*, Hier et aujourd'hui, Paris 1949, p. 11.

capeggiata da Brissot, composta da amministratori federalisti e da «uomini intriganti e avidi di arricchirsi».

Come agente del Comitato di Salute Pubblica nelle province atlantiche, Jullien si rivela un «professionista della politica»[5], perseguendo l'intento pedagogico di realizzare l'unità nazionale con un'integrazione economica, politica e culturale delle due regioni, la Vandea e la Bretagna, tradizionalmente indipendenti rispetto alla Francia: con ciò è possibile «rendre la révolution aimable pour la faire aimer».

Ma di fronte all'emergenza di un'economia di guerra e alle continue carestie, Jullien si vede costretto a condurre con pugno di ferro la tassazione straordinaria contro le forze federaliste e secessioniste: i cosiddetti *modérantistes*, poi assimilati ai *négotiantistes*, tra cui vi sono quei deputati della Convenzione che costruiscono fortune personali con l'istituzione del «Terrore anarchico», nonché quei ceti privilegiati (*riches, demi-riches* e *bourgeois*) peggiori degli antichi aristocratici, colpevoli di aggiotaggio a danno degli assegnati. Jullien si serve dei Comitati di sorveglianza, ma soprattutto delle Società popolari, strumento della dittatura montagnarda, con funzione di ispezione, controllo e repressione: esse diventano i veicoli di una pedagogia di massa, ma anche il braccio armato di una politica economica di guerra, garantita dalla Costituzione del 1793.

Nei due mesi di permanenza a Bordeaux, capoluogo della Gironda, (maggio-luglio 1794), in preda ad una grave crisi annonaria, la repressione conduce alla ghigliottina circa duecento nemici della Rivoluzione: «le sang est le lait de la liberté naissante».

Con Termidoro inizia il tramonto politico: terminato l'incarico, Jullien parte per Parigi il 31 luglio; il 10 agosto è colpito da un mandato di arresto con l'accusa di complicità con Robespierre, e viene incarcerato per 15 mesi senza processo.

1.2. *Jullien e Termidoro: giacobino ma non troppo*

Nei memoriali dal carcere Jullien costruisce la sua difesa affermando di aver sempre obbedito alle direttive del vertice politico parigino, si discolpa delle esecuzioni sommarie avvenute nei due mesi di soggiorno a Bordeaux, e prende le distanze dal culto della personalità di Robespierre. Conclude con la richiesta della rimessa in libertà a causa della giovane età e inesperienza

---

[5] E. Di Rienzo, *Marc-Antoine Jullien de Paris (1789-1848). Una biografia politica*, Guida, Napoli 1999, p. 332. Si tratta di una ricostruzione basata sullo studio, in gran parte inedito, dei manoscritti di Jullien, ceduti nel 1929 ai fondatori dell'Istituto del Marxismo-Leninismo di Mosca.

politica rispetto alle gravi responsabilità del precedente incarico. Ma rivendica anche il suo passato rivoluzionario, affermando la necessità di continuare la politica del Terrore per salvare la patria. Deluso dal governo del Direttorio, la sua posizione si radicalizza: fornisce un'interpretazione classista della Rivoluzione come «état de guerre entre les patriciens et les plébeiens»[6], ai quali ultimi spettava di raccogliere i frutti delle loro conquiste; inoltre collabora al *Journal des hommes libres de tous les pays*, organo di stampa del partito neogiacobino, e stringe amicizia con Babeuf, divenuto comunista, insieme al quale concerta l'opposizione al nuovo regime. Una volta liberi, con l'amnistia di fine ottobre 1795, i due si separano: Jullien si allea con repubblicani di diverse tendenze, tra cui molti politici e deputati, mentre Babeuf intraprende la via della congiura. La loro polemica si svolge pubblicamente sulle colonne dei rispettivi periodici: l'*Orateur plébeien, ou le Défenseur de la République*, fondato da Jullien il 22 novembre 1795, col sostegno economico del Direttorio in funzione antigiacobina, e il *Tribun du peuple* di Babeuf, che questi riprende a pubblicare dopo la sua liberazione.

Il punto di divergenza è nell'interpretazione del principio dell'eguaglianza dei diritti, stabilito nella *Dichiarazione dei Diritti dell'uomo*, quale premessa della Costituzione, e riconosciuto come uno dei principi della Rivoluzione: mentre per Babeuf esso deve condurre all'uguaglianza economica come fondamento della giustizia sociale, e quindi alla scomparsa della proprietà privata con la socializzazione dei beni, per Jullien «l'offensiva contro la proprietà assumerà sempre un significato condizionato alle più generali esigenze della lotta politica del tempo»[7], cioè di fatto alle esigenze della borghesia termidoriana in funzione antipopolare. Così, di fronte alla Costituzione accentuatamente censitaria dell'anno III, Babeuf e il gruppo degli Eguali si arroccano nel più deciso rifiuto del nuovo assetto istituzionale, mentre Jullien e l'intero gruppo neogiacobino lo appoggiano. Di qui le parole roventi di Babeuf il 30 novembre sul *Tribun du peuple*, a favore dei veri democratici: «Ma plume n'a jamais été seulement républicaine, elle fut et ne cessera d'etre démocratique, plébeienne»; quanto ai repubblicani, «c'est une race batarde, dont les dogmes pretent à mille modifications». Jullien risponde, tra febbraio e marzo 1796, con due libelli, l'incompiuto *Le Conciliateur*, in cui ribadisce la necessità di «rapprocher les classes de républicains longtems divisés», e con *La suite aux oeufs rouges*, che profetizza il fallimento del movimento insurrezionale di Babeuf, noto come la congiura degli *Eguali*. Di qui l'accusa di traditore a Jullien, poi ripresa da Filippo Buonarroti.

---

[6] In *De l'esprit de la Révolution francaise*, f. 5.

[7] Cfr. E. Di Rienzo, *Marc-Antoine Jullien de Paris (1789-1848)*, cit., p. 93.

Nella differenza di vedute, un elemento importante è il diverso ruolo sociale: Babeuf, dopo aver sperimentato la vita del proletariato urbano con la mansione di addetto agli approvvigionamenti a Parigi nel biennio del Terrore, e dopo aver subito, sotto la gestione direttoriale con l'impoverimento degli strati più bassi della popolazione, la morte per fame di una delle sue figlie (all'età di 7 anni nel marzo 1796), non ha più molto da perdere; Jullien invece, reintegrato nell'esecutivo del Direttorio, è nelle condizioni di avere ancora da guadagnare: per i suoi figli potrà scegliere tra i migliori istituti di educazione.

Raggiunto l'8 maggio da un mandato di cattura che gli contesta la partecipazione alla congiura degli Eguali, con la motivazione «proscrit comme floréaliste» fino al gennaio 1797, Jullien è costretto ad entrare in clandestinità. Scrive allora a Bonaparte, che aveva appena conquistato la Lombardia, animata da un vivace movimento giacobino, per essere arruolato nelle file dell'*Armée d'Italie*.

1.3. *Il giacobino emigrato nell'esercito di Napoleone*

Nella prima parte della sua opera, Pancera osserva come la problematica rivoluzionaria, che caratterizza la vita del giovane Jullien, trovi la sua soluzione nella formazione del *metodo*, che utilizza un'analisi autocritica delle passate esperienze per approdare ad una politica più *moderata*, ferma restando la necessità di salvare la Repubblica come istituzione.

Il *metodo* è esposto per la prima volta nei *Conseils aux patriotes cisalpins* (ottobre-novembre 1797, pubblicato anonimo a Milano), per fare della Repubblica Cisalpina il vero nucleo dell'unione italica, e sarebbe l'espressione di una *realpolitik* consistente, più in generale, nel rapporto compromissorio con Napoleone per modificarne «dall'interno» la politica, «nella convinzione di avere così in mano strumenti di potere ufficiali e quindi più incisivi».

Ma il *moderatismo* di Jullien si era già espresso in una nuova concezione della rivoluzione come trasformazione sociale e morale, e non più solo politica, in una serie di articoli (fine novembre-inizi dicembre 1795) apparsi sull'*Orateur plébeien* dove, sulla base dell'analisi delle tre forze in gioco, termidoriani, realisti e repubblicani, egli si augurava una pacificazione interna in nome di un principio etico. Circa due anni dopo questa idea è ribadita sul numero 42 del *Courrier de l'Armée d'Italie*[8], e – secondo Di Rienzo – costituirebbe una «vera e propria regressione politica», l'espressione dell'adesione alla «più vieta propaganda illuministica», vista nell'ambito della concezione

[8] *Ibidem.*

di progresso, al cui apice vi sarebbe la «miracolosa estinzione della politica nella morale e del conflitto nel venir meno degli interessi antagonistici»[9].

In realtà, se di regressione si può parlare, questa concerne l'abbandono della carica eversiva illuministica: ciò che era progressivo nel XVIII secolo era la riduzione della morale non più alla religione, ma alla politica, con cui la classe borghese emergente si accingeva a sostituire la feudalità nella guida della nazione. Dopo la Rivoluzione, la necessità di ricondurre la Politica ad una Morale fondata sulla Ragione corrisponde al bisogno di tale classe di giustificare ideologicamente la presa del potere: i suoi teorici devono abbandonare l'opposizione giacobina; Babeuf viene condannato a morte in seguito al processo di Vendome del 26 maggio 1797. Accusato erroneamente di esserne il complice, a Jullien non resta che l'opzione tra la clandestinità e l'esilio.

Ma il suo progetto è pur sempre l'esportazione della rivoluzione, per cui l'intento di fare della penisola italica una «repubblica sorella» della Francia si scontra sia con le ambizioni personali di Napoleone, sia con la politica coloniale di sfruttamento economico attuata dal Direttorio in Italia. Così, quando nella nuova veste di Segretario Generale della neonata Repubblica Partenopea (22 gennaio 1799), egli chiede una diminuzione delle contribuzioni dovute alla Francia, si rende inviso al suo governo, che lo richiama in patria.

1.4. *L'«inevitabile necessità» del Consolato*

A Parigi il 18 brumaio (9 novembre) è attuato il colpo di Stato, che pone termine *manu militari* ai disordini rivoluzionari con l'appoggio della nuova *aristocratie de l'argent* che intende consolidare il proprio potere attraverso il riconoscimento della vendita dei beni nazionali e della libertà d'impresa.

Jullien, dopo l'abrogazione della Costituzione, pur turbato dallo sconvolgimento istituzionale, si barcamena tra l'appoggio al nuovo regime consolare, riconoscendolo come una «inevitabile necessità» per garantire alla nazione ordine e sicurezza (*Projet de motion d'ordre*), e l'obiettivo repubblicano.

Scrive l'*Entretien politique sur la situation actuelle de la France et sur les plans du nouveau gouvernement*, che pubblica anonimo ma che ha una grande tiratura, e in cui si rivolge a Bonaparte dicendo: «Vous n'avez fait qu'obéir au voeu de la nation et à l'inévitable nécessité». Ma l'opera, riferisce Di Rienzo, «accrediterà una volta per tutte l'immagine del congenito

[9] E. Di Rienzo, *Illuminismo politico? Alcuni problemi di metodo nella storiografia politica del Settecento*, in «Studi storici», 4, 1995, pp. 983-984.

trasformismo di Jullien», in linea con il movimento neogiacobino, immagine che non tiene conto però del «sempre presente pericolo di una reazione interna e internazionale». Allo stesso modo, Jullien, che partecipa alla seconda campagna napoleonica in Italia, nel *Mémoire sur l'organisation fédérative et indépendante de l'Italie*, con una proposta federalista indirizzata a Bonaparte, rinuncia all'integralismo repubblicano a favore della ragion di stato francese, nell'ottica di una politica degli equilibri.

Tuttavia rimane fedele all'ideale repubblicano: nel 1801 l'*Appel aux véritables amis de la patrie* testimonia la speranza che la dittatura consolare sia un fenomeno provvisorio, destinato a porre le basi di una repubblica. Così, in seguito ad un attentato dei realisti a Napoleone, che provoca una ventina di morti, e ad una severa repressione di questi contro i notabili repubblicani, Jullien si fa difensore della causa dei 129 deputati incriminati. Viene perciò allontanato da Parigi dal ministro della guerra per ordine del Primo Console; dovrà ricoprire incarichi burocratici e ispettivi per una decina di anni, durante i quali si dedicherà ai suoi interessi pedagogici.

Così la sua diviene una figura marginale, dal punto di vista politico, a partire dal governo del Direttorio, attraverso il Consolato e l'Impero, fino alla Restaurazione. Allora, «chassé de la vie active, il lui resta le domaine de la pensée»[10]; egli si impegna a rivedere i suoi ideali alla luce del progresso della *civilisation*. Questa è intesa a promuovere «le perfectionnement moral de l'homme, le bonheur des individus, la prosperité des nations, la stabilité des gouvernemens»[11]: propugnati dall'*Encyclopédie* di Diderot, erano stati l'obiettivo perseguito dalla Rivoluzione, il progresso dei Lumi. Il termine stesso di *civilisation* «trionfò e conquistò il suo posto negli anni di tormenta e di speranze vissuti dalla Francia, e insieme alla Francia dall'Europa, dal 1789 in poi»[12].

Jullien passa in tal modo dall'attivismo politico agli studi di pedagogia, che affronta con approccio scientifico, e soprattutto fonda la «Revue

---

[10] L. Lévy-Schneider, *L'état d'esprit de Jullien de Paris sous la Restauration et sous Louis-Philippe* in *La Révolution Francaise*, Au siège de la Société (Société de l'histoire de la Révolution francaise), Paris 1912, t. I, p. 45.

[11] Les fondateurs de la «Revue Encyclopédique», *Lettre à MM. Les Collaborateurs et Correspondans de la «Revue Encyclopédique», en France et dans les pays étrangers*, 1819, I, p. 20. D'ora in poi questa rivista verrà indicata con la sigla R.E., seguita dall'annata e dal numero del tomo.

[12] Sulla storia del termine *civilisation* tra XVIII e XIX secolo, cfr. J. Lefebvre, *Civiltà: evoluzione di un termine e di un gruppo di idee*, in «Problemi di metodo storico», Einaudi, Torino 1967, pp. 5 ss.

Encyclopédique», mantenendo l'intento di realizzare con la cultura l'ambizioso compito di guida morale della nazione.

A partire dal 1810, compie numerose visite a Yverdun in Svizzera all'Istituto di Pestalozzi, cui la Rivoluzione aveva attribuito la cittadinanza *honoris causa*, e che, per aver scritto opuscoli di carattere democratico e radicale, era inviso a Napoleone. Dal celebre pedagogista Jullien ricava il principio dell'educazione naturale, basata sull'intuizione, e quello democratico del mutuo insegnamento, che consiste nell'istruire un gran numero di allievi per volta in sala, affiancando ad un unico *instituteur* un allievo molto preparato, o *moniteur*. L'interesse per la scuola primaria riempie il vuoto lasciato dagli *Idéologues*, volti all'istruzione secondaria e universitaria[13].

2. L'approdo al liberalismo

L'interesse di Jullien per la pedagogia non gli impedisce di partecipare, come scrittore e pubblicista, alla vita del paese: nei primi anni dell'800 scrive memoriali in cui si trovano già le premesse dell'opposizione liberale della «Revue Encyclopédique» al governo della Restaurazione. Essi infatti riflettono, secondo Di Rienzo, «l'evoluzione politica del neogiacobinismo francese», che si innesterebbe nell'«*albero della Restaurazione* da cui prenderà origine il liberalismo francese del XIX secolo».

2.1. *Per una monarchia costituzionale e una federazione europea*

La strategia di Jullien è quella di realizzare una monarchia costituzionale, sia nel momento del passaggio dal regime consolare a quello imperiale, sia in occasione del ritorno di Napoleone al governo della Francia, dopo la prima Restaurazione borbonica. Così nella *Profession de foi d'un militaire francais* del maggio 1815 auspica di abolire la *Charte octroyée, concessa* cioè da Luigi XVIII nell'anno precedente, definita una *ordonnance royale*, non valida sul piano legale perché priva di sanzione popolare, a favore di una nuova Costituzione su modello di quella del 1791, fondata sulla sovranità del popolo, e quindi sul potenziamento del Legislativo.

---

[13] S. Moravia, *Il tramonto dell'Illuminismo. Filosofia e politica nella società francese (1770-1810)*, Laterza, Bari 1968, pp. 349 ss.

Nel *Conservateur de l'Europe*, scritto nel 1813, ma pubblicato nell'agosto del 1815, Jullien allarga l'orizzonte della sua strategia all'intera Europa. In esso viene esposto il progetto di una *pacification générale* del continente quale esito necessario dell'età di «guerre e rivoluzioni», che dovrebbe mettere capo alla creazione di una grande federazione europea garante di un nuovo equilibrio internazionale, a condizione di annientare il dominio personale di Napoleone che, simile ad «un moderno Gengis Khan», ha devastato l'Europa meritandosi l'esilio. Lo scritto è dedicato allo zar Alessandro I – amato dai liberali – ed al principe di Svezia, ma – venutone a conoscenza lo stesso Napoleone per una delazione – Jullien viene imprigionato alla fine di dicembre dello stesso 1813 prima a Mantova e poi a Milano.

2.2. *I Cento Giorni: l'appoggio a Napoleone*

Con l'abdicazione di Napoleone, l'11 aprile 1814, Jullien riacquista la libertà ma, sospettato di bonapartismo, compie nell'autunno il già progettato quarto viaggio a Yverdun.

Dopo l'emanazione della *Charte octroyée*, i Borboni favoriscono la formazione di un ministero composto da uomini ostili alle idee del 1789. Perciò, se formalmente sono garantite le conquiste della Rivoluzione, di fatto viene attuata una vera e propria vendetta politica con l'epurazione della classe dirigente dell'Impero, ivi compresi i suoi oppositori interni. Di qui lo sconcerto dell'opinione pubblica e l'irritazione popolare, che preparano il terreno per il ritorno di Bonaparte, visto da Jullien come la «révolution de 1815», «un dernier combat entre les débris de la noblesse féodale et la nation, entre les privilèges et l'égalité […] entre l'ancien régime et les institutions nouvelles». In questo egli trova alleati in liberali come Constant e Sismondi e, distaccandosi dal fronte dei giacobini storici e dei neogiacobini, invita i francesi a sottoscrivere con un plebiscito l'*Acte additionnel aux constitutions de l'Empire*.

È con Fouché, rimasto ministro di Polizia, e fondatore dell'*Indépendant* il 27 aprile 1815, e con antichi compagni giacobini, che entra nella nuova avventura giornalistica, trampolino di lancio per la sua candidatura alle prossime elezioni; contemporaneamente, insieme ad esponenti liberali e futuri collaboratori della «Revue Encyclopédique», come De Gérando, De Lasteyrie e De Laborde, partecipa alla fondazione della *Société pour l'Instruction Elémentaire* che pubblica il *Journal d'Education* (15 giugno 1815). Essa diventerà la maggiore associazione laica di insegnamento primario nel

Paese; Jullien si impegna a diffondere il metodo pestalozziano, e fa nominare Pestalozzi socio straniero *ad honorem*. In cambio l'amico si adopera per diffondere i suoi testi e per fargli conoscere varie personalità presenti nel suo paese, tra cui il generale polacco Kosciuszsko.

2.3. *«Ni Bonaparte ni les Bourbons»*

Alle elezioni di maggio, bocciata la sua candidatura, Jullien non fa parte del gruppo neogiacobino che entra alla Camera, composto da imperiali e da repubblicani, tra questi ex convenzionali e regicidi (*les ressuscités de 1793*, secondo Chateaubriand); ma tra il 21 e il 22 giugno fornisce un contributo fondamentale per fronteggiare il tentativo di colpo di mano di Bonaparte dopo Waterloo, e imporre l'abdicazione dell'imperatore, *extrema ratio* per difendere la patria dalla controrivoluzione delle forze alleate che ne minacciano i confini. Nello scritto *De la Répresentation nationale, dans les journées des 21 et 22 juin 1815*, auspica, sotto lo slogan «ni Bonaparte ni les Bourbons», la nomina di un sovrano di altra dinastia che il voto popolare indica in Bernadotte, il *général patriote*.

Poiché prevale la scelta legittimista con il ritorno dei Borboni sul trono, compone il manifesto *Aux Francais* invitando i governi della Coalizione a rispettare gli «intérets nationaux» della Francia; nella successiva *Déclaration des droits des Francais et des principes de leur Constitution* votata dalla Camera il 5 luglio, giorno della resa di Parigi alla Prussia, e opera dello stesso Jullien, si rivede l'*Acte additionnel* nel senso della difesa della civiltà politica rivoluzionaria, compreso il diritto di resistenza e la ferma presa di posizione contro un ritorno dell'*ancien régime*.

2.4. *La difesa della «Charte octroyée»*

La seconda Restaurazione si apre con un intervento di Luigi XVIII, la proclamazione di Cambrai del 28 giugno, in cui, dalle parole concilianti di perdono, emerge l'intenzione di vendicare il «tradimento» dei francesi[14]; Jullien, nonostante la pubblicazione di materiale antinapoleonico, primo fra

[14] «Je promets […] de pardonner aux Francais égarés tout ce qui s'est passé depuis le jour où j'ai quitté Lille au milieu de tant de larmes jusqu'au jour où je suis rentré dans Cambrai au milieu de tant d'acclamations. Mais le sang de mes enfants a coulé par une trahison dont les annales du monde n'offrent pas d'exemple; les auteurs de cette trame horrible seront désignés par les Chambres à la vengeance des lois».

tutti il *Conservateur de l'Europe*, subisce i rigori della censura con un articolo apparso anonimo sull'*Indépendant* del 7 agosto, la *Note sur le colonel La Bédoyère*. In esso si esprime contro la condanna a morte dell'alto ufficiale: non solo l'appello alla clemenza rimane inascoltato, ma il giornale viene chiuso; è permessa la fondazione di un nuovo periodico, *Le Constitutionnel*, ma con l'esclusione di Jullien, costretto a cedere la propria quota azionaria.

In vista delle nuove elezioni, compone, il primo agosto, il *pamphlet Des élections qui vont avoir lieu pour former une nouvelle Chambre des Députés*, in cui raccomanda di rivedere la *Charte de 1814* definita nuovamente come una «ordonnance royale, révocable et précaire par sa nature meme». Ma questa stessa *Constitution royale*, in seguito alle elezioni del 14-21 agosto, che vedono una netta maggioranza di deputati monarchici *ultra*, viene da lui difesa il 7 settembre sull'*Aristarque francais* – altro periodico controllato da Fouché – in funzione antirealista.

2.5. *Il «Terrore bianco» e il tramonto politico di Jullien*

Il rispetto della Costituzione è bensì garantito dal nuovo gabinetto Richelieu, in cui questi sostituisce Talleyrand, e Decazes va al posto di Fouché alla Polizia; ma si compone dei cosiddetti *modérés*, che verranno invece definiti nel 1831 da Paul-Matthieu Laurent come «les vétérans du *modérantisme*»[15], e descritti come la nuova «aristocratie batarde, moins justifiable et plus odieuse dans ses prétensions que la noblesse de la légitimité»[16]. Essa, dall'8 luglio 1815 al 5 settembre 1816, per calmare l'effervescenza degli *ultras*, e per compensarli della privazione dei portafogli, permette che la Francia venga consegnata alla *vengeance des lois*: i Borboni e i loro alleati, con la pretesa di rappresentare l'«ordine morale» della nazione, spinti dalla predicazione del clero, instaurano quello che verrà conosciuto come il *Terrore bianco*. Per un anno, dall'agosto 1815, si eseguono processi sommari da parte dei tribunali eccezionali, per primi le corti prevostali, appositamente istituite. Esse privano i detenuti politici della tutela del giurì e li espongono alle vendette degli oppositori; così vengono giustiziati bonapartisti, protestanti e seguaci della Rivoluzione con fucilazioni, massacri e ripristino della ghigliottina.

Quella che Jullien chiama la «funeste réaction de la fin de 1815» costringe Fouché all'esilio, e lui stesso a riparare a Yverdun.

---

[15] Un termine già usato da Robespierre, ad indicare l'atteggiamento morale dei controrivoluzionari «qui est à la modération ce que l'impuissance est à la chasteté», in E. Di Rienzo, *Marc Antoine Jullien de Paris*, cit., p. 72.

[16] P.-M. Laurent, *De la modération politique*, R.E., 1831, LII, pp. 572 e 582.

3. Inizia la pubblicazione della «Revue Encyclopédique»: 1° gennaio 1819

Il 1816, l'anno in cui Jullien trascorre a Yverdun 7 mesi di un esilio di fatto, è contrassegnato in Francia dal trionfo della reazione, ma anche da una situazione economica disastrosa, frutto di piogge e inondazioni che distruggono i raccolti, di malattie che decimano il bestiame e del dilagare della carestia, a causa, nell'anno precedente, dell'eruzione del vulcano Tambora in Indonesia, che aveva oscurato il sole con le sue ceneri.

Il 5 settembre Luigi XVIII, più favorevole alla pacificazione della Francia, scioglie la *Chambre introuvable,* così battezzata da lui stesso a significare l'esito incredibile delle passate elezioni, e dichiara che gli articoli della *Charte octroyé*e non sarebbero più stati revisionati: si crea così il clima per una liberalizzazione della stampa, ma anche per l'elaborazione di progetti culturali come potente mezzo di riforma delle istituzioni, al fine di garantire prosperità e pace sociale.

3.1. *La pedagogia comparata e l'inchiesta sociologica*

Jullien pubblica da dicembre, sul «Journal d'éducation», l'*Esquisse sur l'éducation comparée*, con l'ambizione di potenziare l'educazione popolare fornendole una base sistematica. A questo scopo propone di creare, sotto gli auspici dei sovrani europei e con il concorso delle società educative esistenti, una *Commission Spéciale d'Education* i cui collaboratori abbiano l'incarico di raccogliere i dati per un lavoro analitico e comparativo sulle istituzioni educative di tutta Europa e sui loro metodi. Sulla base di tali dati è possibile la fondazione di un *Institut National d'Education* destinato a formare gli istitutori. Infine un *Bulletin général d'Education* si occuperebbe di sistematizzare e diffondere le opere teoriche e pratiche promosse dalla Commissione e dall'Istituto. Questa, sottolinea Pancera, è considerata l'opera più attuale e valida di Jullien, il quale, per il rigore metodologico che dimostra, anche nel tentativo di organizzare una statistica sulle condizioni dell'istruzione scolastica in un determinato territorio, potrebbe ben «annoverarsi tra i precursori, oltre che della pedagogia comparata, anche dell'inchiesta sociologica»[17].

Con la fondazione della «Revue Encyclopédique» è perfezionato il progetto di un'analisi comparata delle istituzioni culturali ed educative, sia

[17] Per questo motivo Jullien è riconosciuto come precursore degli attuali *Unesco* e *Bureau International d'Education* di Ginevra, in C. Pancera, *Una vita tra politica e pedagogia*, cit., p. 272.

estendendola all'intero globo terrestre, sia dotandola di un piano enciclopedico: ad essa è affidato l'ambizioso compito di «établir un REGISTRE UNIVERSEL, dans lequel soient publiés des tableaux comparés de la civilisation progressive, stationnaire, ou meme rétrograde chez les différens peuples»[18]. Si tratta di una delle imprese più impegnative della storia del giornalismo.

3.2. *La «liberté rendue à la presse»*

La nuova legge sulla stampa, (la legge Pasquier), votata nel febbraio 1817 dalla nuova maggioranza realista costituzionale, prepara il terreno ad inediti esperimenti editoriali. Essa, pur limitandosi ad attenuare le misure preventive – come l'autorizzazione del re – e repressive – come censura, sospensione e soppressione – è il risultato di un vivace dibattito, persino alla Camera dei Pari, a favore della libertà di stampa e dell'istituzione del giurì. Queste sarebbero le premesse del *regno del liberalismo*, in cui «dapprima la stampa si arricchisce di una sua moralità nella società civile, e poi approda ad una sua legalità nello Stato»[19].

In effetti, i giornali ricorrono ad espedienti che rendono più difficile l'identificazione degli abusi, e si presentano in molti casi come semi-periodici per sfuggire alla censura. Quando sono perseguiti, si servono dell'aula di giustizia come di una tribuna, in cui gli avvocati, nel difendere le loro tesi, conferiscono ad esse maggiore risonanza; oppure pubblicano *brochures* che ne prolungano gli attacchi al governo[20]. Inoltre si forma, fra gli stessi giornali, un'ampia ed efficace convergenza d'azione: «Ainsi y eut-il, non seulement des journaux, mais, au sens moderne du terme, une véritable presse».

Anche l'opinione pubblica viene a costituire a Parigi, a partire dal novembre 1817, con la *Société des amis de la liberté de la presse*, un vero e proprio gruppo di pressione sul potere politico, collaborando alla preparazione dell'*exposé des motifs* che accompagna le leggi de Serre del 1819. Queste, di ispirazione dottrinaria, sopprimono la censura e l'autorizzazione

---

[18] M.-A. Jullien, *Note (annuaire universel)*, R. E., 1819, IV, p. 288.

[19] Cfr. L. Compagna, *Alle origini della libertà di stampa nella Francia della Restaurazione*, Laterza, Bari, 1979, p. 108.

[20] «Le camouflage des mots, la insinuation mouchetée, la comparaison sous-entendue, la subtilité directe ou indirecte dans le sarcasme et l'astuce» in J. Godechot, P. Guiral e F. Terrou (a cura di), *Introduction a Histoire générale de la presse francaise*, Troisième partie: *La presse nationale sous la Restauration et la Monarchie de Juillet*, Presses universitaires de France, 1969, p. 32.

preliminare, e rinviano la maggior parte delle infrazioni davanti alla Corte d'assise, cioè alla giuria popolare (*jury)*.

Alla «liberté rendue à la presse» Jullien fa riferimento per convincere Gouriet, il redattore principale del *Constitutionnel,* ad associare economicamente il suo quotidiano alla «Revue Encyclopédique» che, vista la probabile concorrenza con altri giornali in un clima di liberalizzazione della stampa, gli avrebbe conferito un respiro più ampio con la «correspondance très active sur les points les plus éloignés du monde». Le sue pubblicazioni mensili infatti sono «déjà encouragées par les plus honorables suffrages dans les différentes parties du monde civilisé». Vengono destinati a finanziare la rivista anche i proventi della vendita, avvenuta nel 1816, di moltissimi documenti, di proprietà di Jullien, risalenti al periodo rivoluzionario e napoleonico.

4. L'«Encyclopédie» vivente

La «Revue Encyclopédique» si presenta come la continuazione di una rivista precedente, il «Magasin encyclopédique» di Aubin Louis Millin, edito dal 1795 al 1816, e divenuto «Annales Encyclopédiques» (1817-1818), ma realizzata «sur un plan beaucoup plus complet»[21]. In effetti Jullien trasforma un semplice periodico in «une sorte d'institution qui a pour objet d'établir un moyen central de communication et de correspondance entre les hommes qui aiment à contribuer aux progrès de la civilisation»[22].

Oltre che più completa, la «Revue Encyclopédique» è connessa alla vita (*vivante*), differenziandosi anche dalla «première Encyclopédie». Rispetto a questa non vuole essere né «systématique, ni stationnaire», ma «périodique et progressive», nel suo procedere «avec les siècles et avec les connaissances humaines»[23].

Il sostantivo «Revue» infatti indica un cambiamento di professione del suo fondatore rispetto ai *philosophes* dell'«Encyclopédie»: Jullien è un giornalista, e impersona quella tendenza verso una stampa sempre più dinamica, di cui parla Suzanne Tucoo-Chala nella sua opera su Panckoucke, avvenuta con la fine della *République des Lettres* in seguito alla Rivoluzione francese, e, a

---

[21] M.-A. Jullien, *Introduction*, R.E., 1819, I, p. 17.

[22] M.-A. Jullien, *Coup d'oeil général sur la «Revue Encyclopédique» et sur les huit premiers volumes de ce Recueil*, R.E., 1821, IX, p. 7.

[23] M.-A. Jullien, *Relevé sommaire des travaux scientifiques et littéraires, mentionnés dans la «Revue Encyclopédique», pendant le cours de l'année 1821*, R.E. 1822, XIII, p. 6.

partire dalla metà del XVIII secolo, verso la riabilitazione della stessa figura del giornalista[24].

Furio Diaz sottolinea la continuità tra lo sviluppo dell'enciclopedismo e lo sviluppo dei giornali: l'enciclopedismo della grande impresa diderotiana favorirebbe quel legame fra periodici ed enciclopedia, «dove l'esigenza di riferimento ad un'informazione più sicura si integra con la spinta verso le ipotesi di un nuovo fermento intellettuale»[25], introducendo anche nei giornali l'*esprit philosophique*.

Jullien stesso attribuisce alle *revues* tale compito esclusivo, allo scopo di completare e perfezionare l'educazione ricevuta nelle scuole. Perciò propone recensioni di opere scelte, quali resoconti di scoperte e ricerche in campo letterario, scientifico e artistico, nonché la registrazione di fatti degni di «trouver place dans l'histoire de l'esprit humain»[26].

Il sottotitolo della «Revue Encyclopédique» è perciò *Analyse raisonnée des productions les plus remarquables dans la Littérature, les Sciences et les Arts, par une reunion des membres de l'Institut, et d'autres hommes de lettres.*

5. La nostalgia degli ideali rivoluzionari

«Il est, en pleine Restauration, un esprit du XVIII° siècle et de la période révolutionnaire»: così Lucien Lévy-Schneider dipinge *l'état d'esprit* di Jullien negli anni della «Revue Encyclopédique», quello di un nostalgico degli ideali illuministi e rivoluzionari, affetto da una melanconia essenzialmente politica.

5.1. *La Rivoluzione in poesia*

La teoria di Lévy-Schneider trova conferma in una recensione alla traduzione delle *Poésies* di Schiller ad opera di Camille Jordan, in cui Jullien paragona *Les Chimères* del poeta tedesco, quale «mélancholique adieu aux illusions qui avaient séduit son premier age», all'elegia da lui stesso composta in Italia, verso la fine del 1812, ispiratagli dai « souvenirs toujours présens

---

[24] S. Tucoo-Chala, *Charles Joseph Panckoucke & la librairie francaise (1736-1798)*, Pau Paris : Marrinpouey Jeune Touzot 1977, p. 459.

[25] *Introduzione* di F. Diaz a «Studi settecenteschi», n. 16, a cura di G. Abbattista, Bibliopolis, Napoli, 1996.

[26] *De l'influence des Revues sur la propagation de l'esprit philosophique* (articolo non firmato), R.E. 1828, XL, pp. 5-9.

de ma première jeunesse et de ses nobles espérances». Questi sono però improntati ad un sentimento di pessimismo politico che unisce passato, presente e futuro: un «sentiment profond […] d'une longue expérience de l'injustice et de l'ingratitude», cui si aggiungono «la déplorable image des affreuses calamités qui pesaient alors sur la France et sur l'Europe», e «la prévision des désastres plus grands encore que lisais avec effroi dans l'avenir»[27].

Nell'ultimo anno della direzione alla rivista, Jullien risolve ancora sul piano poetico, ma animato da una nuova speranza, il problema politico del Terrore, riconducendolo all'età giovanile, «age d'espoir, d'illusion, d'erreur», «un nouvel age d'or», sia pur caratterizzato da un «incroyable mélange de raison, de folie»: ciò nei versi che, nel marzo del 1830, profetizzano la prossima rinascita della Francia alla libertà. In essi Jullien, dopo un *excursus* storico sulle vicende del suo Paese dalla Rivoluzione alla Restaurazione, ricorda che «*la France renaissante aux grands hommes sera reconnaissante*»[28].

Sin dai primi volumi della «Revue Encyclopédique», qualsiasi accostamento dei rivoluzionari del '93 ai monarchici *ultra* è finalizzato a mettere in guardia l'opinione pubblica sulla minaccia di un ritorno dell'*ancien régime*. Così, allorché il 13 febbraio 1820 il duca di Berry, nipote del sovrano, muore in un attentato, Jullien scrive un articolo in cui la preoccupazione principale pare essere la presa di distanza non tanto, come dice Di Rienzo, «dagli eventi rivoluzionari del passato prossimo e più remoto», quanto dagli innumerevoli interventi apparsi sui giornali che imputano l'assassinio del duca «aux excès conjoints du semilibéralisme gouvernamental et des feuilles de la gauche»[29]. Jullien perciò, reclamando «l'union intime de la liberté et de la morale publique», assolve «les doctrines de la philosophie et de la liberté» dalla responsabilità del crimine[30]. Le sue preoccupazioni sono del tutto fondate: di lì a poco vengono sospese le libertà individuali e la libertà di stampa.

Infine, nella recensione di Artaud de Montor all'*Examen critique des considérations de M.me de Stael sur la révolution francaise* del convenzionale Bailleul, trova spazio una nota redazionale, in cui Jullien cita una sua *brochure* del 12 agosto 1815, in vista delle imminenti elezioni, *Quelques Réflexions sur l'esprit qui doit animer les écrivains politiques, amis de la patrie et du roi,*

---

[27] M.-A. Jullien, *Poésies de Schiller, traduites de l'allemand par C.J.*, R.E., 1822, XIV, pp. 78-80 n.

[28] M.-A. Jullien, *Souvenirs politiques de la Révolution et de l'Empire. Vers*, R.E., 1830, XLVII, pp. 320-27

[29] Cfr. J. Godechot, P. Guiral e F. Terrou (a cura di), *Histoire générale de la Presse francaise*, cit., Chapitre II: *La seconde Restauration*, p. 67.

[30] M.-A Jullien, *Nécrologie. Charles-Ferdinand d'Artois, Duc de Berry*, R.E., 1820, V, pp. 400 ss.

et diriger les membres des collèges électoraux dans le choix des députés. In essa, parlando dello 'spirito rivoluzionario', allude alla volontà di sovvertire l'ordine costituzionale: «Cet esprit est aujourd'hui plus actif et plus dangereux dans le camp des anciens royalistes, que du coté des partisans d'un système libéral et constitutionnel». Perciò gli preme, ancora una volta, più che dare un giudizio sulla storia passata, esprimere un timore su quella immediatamente futura. I fatti gli daranno ragione: alle elezioni seguenti, gli *ultras* conseguiranno una schiacciante vittoria.

5.2. *Il cosmopolitismo illuministico e le scienze morali e politiche*

L'ideale cosmopolita, inerente al concetto di *fraternité,* è superiore allo spirito enciclopedico, poiché attiene alla stessa natura umana: «il ne nous suffit pas d'etre *encyclopédiques:* nous aspirons surtout à etre *cosmopolites*»[31]. Jullien, in quanto tale, è per Lévy-Schneider «le dernier des encyclopédistes», che «travaille pour l'humanité entière, pour tous les esprits éclairés», cui preme il recupero delle *scienze morali e politiche*.

Le *Sciences morales et politiques* erano state istituite dagli *Idéologues* in epoca direttoriale insieme alla classe delle scienze fisiche e matematiche e a quella della letteratura e belle arti, e riunite nell'*Institut National des Sciences et Arts*. Questo, ispirandosi a Bacone e all'«Encyclopédie» di Diderot, doveva sostituire le ormai obsolete *Académies*, che erano state eliminate nel 1793 in quanto strumenti dell'*ancien régime*. La classe delle scienze morali e politiche, legata alla tradizione illuministica, era stata a sua volta soppressa da Napoleone, divenuto imperatore, nel 1803.

L'aver reintrodotto le scienze morali e politiche, «qui donnent la vie à toutes les autres»[32] nella classificazione delle scienze, e l'aver riservato loro un posto preminente inserendovi la filosofia, consente a Jullien una valutazione dell'azione governativa, nonostante le ripetute dichiarazioni, a partire dal primo fascicolo, delle finalità eminentemente culturali della rivista, «une sorte de sanctuaire consacré aux sciences et aux arts industriels».

---

[31] I collaboratori e corrispondenti della rivista devono attenersi al motto: «Je suis homme, et lié par une étroite chaine / A tous les intérets de la famille humaine; / Et j'aime à resserrer cette fraternité, / Qui fait que tout mortel tient à l'humanité», in M.-A. Jullien, *Lettre à MM. Les Collaborateurs et les Correspondans de la «Revue Encyclopédique, en France et dans les pays étrangers*, R.E., 1823, XVII, pp. 9-10.

[32] M.-A. Jullien, *Introduction contenant quelques vues sur l'état et le progrès des sciences, en 1823*, R.E., 1824, XIII, p. 9.

Nelle *Lettres à MM. Les Collaborateurs* è spiegato come l'unità delle scienze non sia solo un principio ontologico o epistemologico, ma anche e soprattutto morale e filantropico, su cui si basa la vera «Santa Alleanza» fra i popoli, perché principio di utilità sociale: «la nature de la «Revue Encyclopédique» exige des articles philosophiques, c'est à dire rapportés à un but général d'utilité».

In tal modo, se, nella sezione specifica delle *Analyses et extraits d'ouvrages choisis*, le scienze morali e politiche costituiscono un gruppo di scienze autonomo (insieme alle scienze fisiche e naturali e alla letteratura e belle arti), in realtà ispirano anche le altre tre sezioni di ogni tomo della rivista. Infatti i *Mémoires originaux, ou Notices, Lettres et Mélanges sur des objets d'intéret général* contengono, oltre alle dediche del direttore ai collaboratori e corrispondenti, anche i riassunti degli anni precedenti, in cui vengono monitorati i progressi in campo sociale e morale, e gli eventuali regressi compiuti dalle istituzioni culturali e governative; nelle *Nouvelles scientifiques et littéraires* trovano un largo spazio le *tablettes nécrologiques*, dedicate «à des littérateurs et à des savans distingués, mais surtout à des hommes vertueux et utiles».

Il necrologio, a differenza delle biografie dei vivi, che «s'attachent à tous ceux qui est marquant dans leur siècle pour le dégrader», è descritto come «une sorte de monument à la mémoire des hommes utiles ou distingués, que la mort vient successivement frapper», per cui «la mort, bien observée et méditée, est une grande maitresse pour la direction de la vie»; d'altronde, secondo Montaigne: «qui apprendrait aux hommes à mourir, leur apprendrait à vivre».

Infine nel *Bulletin bibliographiqu*e, che presenta, in sintesi rispetto alle *Analyses*, nuove opere classificate per nazioni e per ordine di scienze, ogni nazione occupa un posto proporzionato non all'estensione geografica, o all'entità della popolazione, alla forza militare o al potere politico, il che richiederebbe molto spazio nella «Revue Encyclopédique», ma «à la nature et à l'importance de ses travaux scientifiques, industriels et littéraires», adatte ad un «public éclairé».

Per tutte le sezioni, la profondità del pensiero «s'allie avec une rédaction claire, précise et rapide»: si tratta, come dice Montesquieu, «de faire penser plus que de faire lire».

5.3. *Laicità del progresso della «civilisation»*

Il progresso della civilizzazione ispira le scienze morali e politiche: esso è reso possibile dalle sole forze della ragione, ed è celebrato da Condorcet nell'*Esquisse d'un tableau historique des progrès de l'esprit humain*[33]. Altri

[33] M.-A. Jullien, *Vue générale des progrès de plusieurs branches des Sciences naturelles*

filosofi hanno affrontato, in Germania, il problema, fornendo una periodizzazione della storia dell'umanità in stretto rapporto con la pedagogia, secondo le tre età dell'uomo (infanzia, giovinezza, virilità); esse sono volte a raggiungere l'età della ragione, o della moralità compiuta. Ma, a differenza dei filosofi tedeschi, Jullien afferma che la moralità debba prescindere da ogni ipotesi metafisica o religiosa, fondandosi sulla storia e sulla natura dell'uomo[34].

Questa funzione è svolta dalla «Revue Encyclopédique»: nel sollecitare l'invio di rapporti sulle istituzioni di beneficenza, di istruzione e utilità pubblica dei diversi paesi, promuove l'*einsegnement mutuel* tra i popoli, creando una «émulation salutaire […] pour favoriser la marche et les progrès de la civilisation»[35].

I principi cui si ispira la rivista sono riassunti nelle tre citazioni poste sul frontespizio di ogni volume: le prime due tratte da Bacone («Toutes les sciences sont les rameaux d'un meme tige») e da Montaigne («L'Art n'est autre chose que le *controle* et le *registre des meilleures productions*»); la terza, dello stesso Jullien («les belles lettres et les sciences, bien étudiées et bien comprises, sont des instruments universels de raison, de vertu et de bonheur»), viene firmata solo a partire dal secondo tomo e mantenuta in alcuni di quelli successivi.

6. Liberalismo e meritocrazia per una società industriale

Per Jullien il progresso della *civilisation*, come progresso della scienza e dell'educazione, è fondamentale per risolvere la questione sociale che si pone con urgenza nei primi anni dell'Ottocento, parallelamente allo sviluppo economico della borghesia.

La civilizzazione, secondo i principi liberali, è condizionata dal consolidamento della monarchia costituzionale, che garantisce la conciliazione di ordine e libertà[36], e dallo sviluppo dell'industria. A partire dagli anni Venti

---

depuis le milieu du dernier siècle, par M. de Lacepède, Paris 1819, R.E., 1819, III, pp. 30 ss.

[34] M.-A. Jullien, *Quelques vues sur le développement naturel et progressif de l'esprit humain et de la civilisation*, R.E., 1823, XX, pp. 10 ss.

[35] M.-A. Jullien, *De l'admimistration de la charité publique en Norwège*, R.E., 1820, VII, pp. 417 ss.

[36] Il 1° maggio 1815 Jullien pubblica Le Conciliateur ou la Septième époque. Appelle à tous les Francois, uno scritto che ripercorre tutte le epoche della Rivoluzione francese per arrivare alla settima ed ultima, quella della «conciliation» dell'ordine e della libertà, vista come il compimento della rivoluzione stessa. Sulla rivista riaffermerà il concetto: la condizione per l'avanzamento di una nazione è il consolidamento dell'ordine pubblico quale garanzia della

e Trenta dell'Ottocento il termine *industria* è identificato con l'attività produttiva per eccellenza, vista come il fondamento di un nuovo tipo di società pacificata dalle tempeste rivoluzionarie e in grado di garantire benessere per tutti. Jullien apprezza il *Catéchisme des Industriels* di Saint-Simon, da lui conosciuto personalmente nel 1824, e di cui è fervente ammiratore; e, convinto che un'educazione fondata sulla scienza e sulla tecnica sia più consona allo spirito dei tempi, invia tre dei suoi figli all'*École polytechnique.* Così, nel terzo periodo della sua vita, caratterizzato, secondo Pancera, dalla problematica sociale, la società razionale da lui concepita «risulta fortemente meritocratica nella gerarchia dei ruoli dando così una giustificazione di ordine assoluto e metastorico al privilegio di classe degli *industriosi*» – in effetti la società industriale è una società che avalla le disuguaglianze e le premia, facendo del mero compenso il fine dell'azione lavorativa.

L'idea di una società meritocratica si estende anche all'ambito pedagogico: nel 1816 l'Istituto di von Fellenberg a Hofwyl in Svizzera, dove si impartisce un'educazione differenziata secondo l'appartenenza di classe, viene indicato da Jullien come il modello ideale di scuola. Infatti, a causa del deficit costante dell'Istituto pestalozziano, l'elemento democratico di Yverdun passa in secondo piano, a vantaggio di un maggior efficientismo e razionalismo di cui è garante un ordine sociale classista: così, in nome dell'«harmonie établie entre tous les élemens du corps social», per cui «chacun se trouve content et heureux dans la sphère dans laquelle il est placé […] sans éprouver le besoin de s'élever dans une classe supérieure», l'educazione non entra in conflitto con lo *statu quo*.

7. La battaglia industrialista della «Revue Encyclopédique»

Negli anni della Restaurazione, e poi della monarchia di Luglio, l'economia francese decolla nel campo dell'industrializzazione, a cui la Francia arriva seconda, insieme al Belgio. Tale processo comporta delle modificazioni a livello sociale: i promotori dello sviluppo economico sono quella aristocrazia fondiaria che non si limita più ad essere passiva redditiera della terra, ma si dedica al suo sfruttamento, e la grande borghesia che, con l'acquisto dei beni ecclesiastici e degli emigrati, confiscati dalla Rivoluzione, sviluppa uno spirito imprenditoriale con investimenti produttivi. Questi soggetti trovano nella

---

libertà, in *Relevé sommaire des travaux scientifiques et littéraires, mentionnés dans la «Revue Encyclopédique», pendant le cours de l'année 1821*, R.E., 1822, XIII, p. 17.

Costituzione censitaria del 1791 il modello dello Stato di classe che sarà presente in Francia per più di un secolo, e nella legge Le Chapelier, dello stesso anno, l'istituzionalizzazione della libertà industriale e commerciale. Negando il diritto di sciopero e quello di associazione, la legge sancisce il distacco della nascente aristocrazia del denaro dal nuovo «quarto stato»: la parola libertà assume un significato di classe, diventando la libertà dell'accumulazione capitalistica, espressa dalla parola d'ordine dell'epoca, «Enrichissez-vous!»[37].

L'economia politica, la nuova scienza fondata da Adam Smith nella seconda metà del Settecento nell'Inghilterra della prima rivoluzione industriale, è la scienza della borghesia rampante: essa si propone di superare il problema dell'antagonismo di classe con il ricorso ad un ordine naturale di origine provvidenziale, che garantisca la coincidenza dell'interesse del singolo con quello della collettività.

Negli anni Venti dell'Ottocento tale ottimismo non è più giustificato, poiché iniziano ad apparire disoccupazione e abbassamento dei salari dovuti alla sovrapproduzione, causa l'eccedenza dell'offerta rispetto alla domanda. Allievo di Smith, Say subordina le disuguaglianze all'utilità sociale, e dipinge sulla «Revue Encyclopédique» il quadro illusorio di una società pacifica che, grazie al libero scambio, moltiplica il potere dell'uomo sulla natura e aumenta la popolazione[38].

Chi invece affronta il problema, rilevando le contraddizioni dello sviluppo economico capitalistico, è Simonde de Sismondi, per il quale le crisi di sovrapproduzione sono da ascrivere non al caso ma alla ricerca del profitto, costitutiva della società industriale[39]. Di qui la richiesta dell'intervento dello Stato, contro una concezione dell'economia formulata da Say come scienza fine a se stessa, limitata alla pura osservazione e classificazione dei fatti.

Vi è infine una soluzione metafisico-religiosa alla questione sociale che si trova sia in Benjamin Constant, con l'integrazione dell'*esprit d'industrie* al *sentiment religieux*, individuata come tratto caratteristico del XIX secolo[40], sia in Saint-Simon e nei suoi discepoli, che nell'«association universelle» vedono

---

[37] L'autore ne è Francois Guizot, dottrinario, fervente sostenitore della politica del *juste milieu*, che legittima la scalata al potere da parte della classe *moyenne*.

[38] J.-B. Say, *Balance des consommations avec la production*, R.E., 1824, XIII, p. 18.

[39] J.-C.-L. Simonde de De Sismondi, *Nouveaux principes d'économie politique, ou de la richesse dans ses rapports avec la Population. Jour qu'ils peuvent jeter sur la crise qu'éprouve aujourd'hui l'Angleterre*, R.E., 1826, XXXI, pp. 608 ss.

[40] M.-A. Jullien, *Coup d'oeil sur la tendance générale des esprits dans le dix-neuvième siècle. Extrait du Discours prononcé par M. B. Constant*, R.E., 1825, XXVIII, pp. 662 ss.

il fondamento di un «Nouveau Christianisme»[41]; lo stesso Jullien invoca a più riprese, non solo in ambito culturale, ma anche economico, l'esprit d'association, che può essere letto come una riedizione del principio di *fraternité*.

8. Dalla difesa della *Charte octroyée* al repubblicanesimo

La *Charte octroyée* di Luigi XVIII istituzionalizza la vittoria della grande borghesia terriera, finanziaria e industriale, garantendo le acquisizioni dei beni nazionali a scapito del clero e dei nobili emigrati, nonché la libertà di coscienza, di culto e di stampa, e l'eguaglianza dei diritti, che vengono così caratterizzati da un contenuto di classe. E in effetti, come nota Di Rienzo, la «Revue Encyclopédique» diffonde l'educazione «oltre i limiti delle classi colte tradizionali, con particolare riferimento al pubblico costituito dal nuovo ceto borghese ottocentesco».

Già nel suo primo tomo, nella rassegna di Mahul sugli scritti politici usciti l'anno precedente, si confinano nell'ambito di «antiques doctrines» e di «vieilles institutions» opere di autori realisti, quali Bonald, Fiévée, Chateaubriand, mentre fautori della «liberté, tolérance, modération, amour des hommes, égalité des droits», e al di sopra di tutti gli scrittori, sono collocati gli studi sul governo rappresentativo e sulla Costituzione della Francia, riuniti nel *Cours de politique constitutionnelle* di Benjamin Constant, altra colonna portante della rivista insieme a Sismonde de Sismondi.

Se la Costituzione del 1814 è un compromesso con l'*ancien régime* – è detta *Charte* per ricordare le ordinanze promulgate dagli antichi re di Francia fino a Luigi XIV, e *octroyée* perché concessa per volontà reale e non votata dal popolo[42] – garantisce però, come già nel 1791, la monarchia costituzionale, con il potere legislativo condiviso dal re, che propone le leggi, e da due Camere, quella dei Pari, nominati a vita o per eredità, e quella dei Deputati, eletta per cinque anni, ma con suffragio molto ristretto. La novità è l'introduzione, anche se non formalmente, del regime parlamentare – su modello delle istituzioni inglesi; se il potere esecutivo è affidato al re, i suoi atti devono essere controfirmati da uno o più ministri, che diventano penalmente responsabili, ma anche politicamente poiché, per la prima volta in Francia, possono essere scelti nelle Camere. Si tratta così di un primo passo verso l'istituzione di

---

[41] *Doctrine de Saint-Simon. Exposition*. Première année (art. non firmato), R.E., 1830, XLVIII, pp. 340 ss.

[42] Cfr. J. Godechot, *Les constitutions de la France depuis 1789*, Flammarion, Paris 1970, p. 215.

un regime di tipo ministeriale, nel quale il re regna ma non governa, secondo la teorizzazione che ne fa Benjamin Constant, dal 1806, nei *Principes de politique*.

Il compito della «Revue Encyclopédique» è quello di assicurare il rispetto della *Charte* contro i progetti degli *ultras* miranti al ritorno integrale dell'assolutismo e, quindi, all'abolizione della stessa, che è, «tout balancé, l'une des constitutions la plus libérale de l'Europe», a patto che si liberi di quelle misure di eccezione e di sospensione – previste dall'art. 14 – di cui Luigi XVIII si era servito, legiferando per ordinanze, dopo la parentesi dei Cento Giorni, il 24 luglio 1815[43].

Ma nonostante il suo costituzionalismo, nota Di Rienzo, nel carteggio con Sismondi Jullien si lamenta della «persistente disaffezione» mostrata verso la rivista da parte di «beaucoup de francais honorables, comme M.me de Stael, De Broglie et plusieurs autres», ovvero dei liberali costituzionali *à l'anglais*, commentando «nul n'est prophète dans son pays». Il motivo di tale atteggiamento sta, come si è visto, nell'altrettanto persistente tendenza repubblicana del fondatore della «Revue Encyclopédique», che, all'interno di un giudizio positivo sulla Rivoluzione, comune al gruppo liberale[44], considera il Terrore come un momento necessario di quella, e non come un tradimento.

Perciò se, in ossequio alla componente cosiddetta *modérée* della «Revue Encyclopédique», Jullien può inserire un articolo del *dottrinario*[45] Francois Guizot volto a disgiungere lo *spirito rivoluzionario* dalle Enciclopedie moderne, che, al contrario, avrebbero la funzione di costituire un elemento di ordine e di stabilità[46], d'altro lato, sempre più in nome del repubblicanesimo si distacca dal liberalismo.

Già in occasione dei tagli subiti dalla censura, da luglio ad ottobre del 1827, la «Revue Encyclopédique» rivendica il diritto di pubblicare una rilettura della Rivoluzione Francese; ma la svolta definitiva può essere datata a pochi mesi

---

[43] C. Dupin, *Constitutions de la Nation francaise* […] *par le comte Lanjuinais*, R.E., 1819, II, p. 469.

[44] Essi mantengono un buon rapporto con la Rivoluzione, distinguendosi dalle posizioni dei liberali inglesi e tedeschi (cfr. P. Rossi e C.A. Viano, *Storia della filosofia*, Laterza, Bari 1999, vol. V, p. 6).

[45] I dottrinari, così chiamati dopo la Restaurazione, saranno descritti da P.M. Laurent nel 1831 come i fautori del *juste-milieu*, strenui difensori della *Charte*, sia contro l'*ancien régime*, sia contro il popolo, in *De la modération politique*, R.E., LII, p. 591.

[46] *Des Encyclopédies considérées comme moyen de civilisation, art. par M. Guizot, servant d'introduction à un nouvel ouvrage intitulé Encyclopédie progressive, ou Collection de traités sur l'histoire, l'état actuel et les progrès des connaissances humaines*, R.E., 1826, XXX, Supplemento tra le pp. 288 e 289, pp. 1 ss.

prima di quella di Luglio, allorché Jullien entra, come assistente al consiglio di direzione, in un nuovo periodico, la *Tribune politique et littéraire*, poi *Tribune du mouvement*, con la responsabilità ufficiale dei fratelli Victorin e Auguste Fabre, destinato a diventare centro di dottrina e di propaganda repubblicana.

Alla fine, nota Di Rienzo, sulla «Revue Encyclopédique» «l'irriducibile radicalismo politico di Jullien, nascosto per anni sotto il rassicurante involucro neoilluminista della *Revue*, dovrà attendere la data fatidica del 1830 per rivelarsi pienamente»: all'indomani della nuova rivoluzione, egli saluta l'epoca in cui «le système oppresseur de la Sainte-Alliance va faire place à une direction politique plus analogue à l'état des lumières et au besoin d'amélioration progressive qui se fait généralement sentir»[47].

La battaglia antigovernativa della «Revue Encyclopédique» contiene alcuni momenti cruciali.

8.1. *Il cambiamento della legge elettorale*

Il problema di una nuova legge elettorale si pone per la destra subito dopo lo scioglimento della *Chambre introuvable* da parte di Luigi XVIII; infatti la conferma degli articoli della *Charte* del 5 settembre 1816 e la legge sulle elezioni del 5 febbraio 1817[48] bloccano la sua avanzata a vantaggio della sinistra, poiché ogni anno viene di fatto rafforzato il *coté gauche*; alla fine del 1819 l'esito delle elezioni è talmente favorevole ai liberali che Luigi XVIII, sotto l'influenza della Corte e degli *ultras*, propone di modificare la legge elettorale in palese violazione della Carta.

Saint-Albin Berville[49] spiega come ciò sia possibile in virtù di un mutamento del sistema politico del *parti ministériel*[50], costituito dai dottrinari, cui era propria la pratica della *bascule,* quella cioè di «marcher entre les deux

---

[47] *Banquet mensuel de la «Revue Encyclopédique» (Mardi, 10 aout)*, R.E., 1830, XLVII, p. 516.

[48] La legge del 5 febbraio stabilisce l'elezione diretta, fissa il censo degli elettori a 300 fr. d'imposizione e quello degli eleggibili a 1000, rende la Camera rinnovabile per un quinto ogni anno, con un solo collegio per dipartimento, per cui circa 30 milioni di francesi sono rappresentati da 97000 elettori.

[49] S.-A. Berville, *Choix de Rapports, Opinions et Discours prononcés à la tribune nationale* […]. *Session de 1919-1820*, R.E., VIII, pp. 522 ss.

[50] Il *parti ministériel* è il terzo partito che si forma nella Francia della Restaurazione «non comme représentant de telle opinion, de tel intéret, mais comme pouvoir», composto prevalentemente da funzionari pubblici e da «un certain nombre d'hommes des deux autres partis que l'amour de la paix disposait à des concessions».

partis, à distance plus ou moins égale, en se servant tour à tour de chacque parti contre les prétensions du parti opposé»: il capo gabinetto Decazes, abbandonando la neutralità fra i due schieramenti, decide di fare gli interessi della corona appoggiando il *coté droit.* Così l'«Assemblée représentative, jusqu'alors partagée en trois sections à peu-près égales, se divise en deux partis qui se précipitent avec violence l'un contre l'autre. Le pouvoir renonce à la neutralité, et se mele aux combattants».

Con l'assassinio del duca di Berry, il 13 febbraio 1820, Decazes, accusato di complicità nel crimine, è sostituito dal duca di Richelieu, ma i ministri sono ancora esponenti del partito dottrinario. Nel frattempo l'Europa è agitata da moti rivoluzionari, in Spagna, a Napoli, in Portogallo, in Grecia, e i rispettivi sovrani sono occupati a reprimerli; l'eco di questi avvenimenti si manifesta in Francia con l'esasperarsi della reazione. Tra marzo e giugno sono sospese la libertà personale e quella di stampa; a marzo è ristabilita la censura per i giornali e gli scritti periodici, e a giugno è approvata la nuova legge elettorale.

Dopo una memorabile discussione, in cui si distingue il coraggioso intervento di un sofferente Camille Jordan all'opposizione, vengono stabiliti due collegi, nei quali è previsto un doppio voto per i più abbienti, e la conseguente riduzione del numero degli aventi diritto al voto. Con una legge simile, nota Martial Avenel[51], alle elezioni trionfano i più accesi realisti: «La nouvelle loi électorale avait porté son fruit: la portion aristocratique de la Chambre s'était prodigieusement accrue», e per tutta la sessione del 1821 il moderato duca di Richelieu è affiancato da ministri ultrarealisti, come Corbière e Villèle, che attendono l'occasione favorevole per costituire un ministero con membri del loro partito. Così si crea «une espèce de phénomène digne de tenir une place dans les annales du gouvernement représentatif».

L'occasione si presenta con la richiesta di una nuova legge sulla censura, per cinque anni, da parte di un ministero indebolito per il mancato appoggio, oltre che dei realisti, anche dei liberali (che speravano che quella maggioranza si sarebbe dissolta, come nel 1815, sotto il peso dei suoi eccessi). In tal modo il ministero, mediocre più che «moderato», viene fondato sul potere arbitrario: «dans la conscience de leur faiblesse, les ministres jetaient encore quelques regards d'espoir sur le grand moyen de salut des hommes médiocres, le pouvoir arbitraire». Il ministero, privato anche dell'appoggio del re, viene sostituito da elementi della destra *ultra* – fra cui Villèle alle finanze – i quali come deputati avevano finto di difendere la libertà di stampa boicottando il

[51] M. Avenel, *Annuaire historique universel pour 1822* […] *par C.L. Lesur*, R.E., 1822, XVI, p. 495.

disegno di legge sulla censura, ma ora come ministri la sopprimono a larga maggioranza e tolgono al giurì la prerogativa dei delitti di stampa.

8.2. *Costruzione di un mito*

La morte di Napoleone, il 5 maggio 1821, spinge la «Revue Encyclopédique» a fare un primo bilancio delle gesta del «représentant de la révolution»[52]. Jullien precisa che è considerato tale solo dagli «amis de la liberté», mentre invece è visto come il restauratore del trono e dell'altare dagli «amis du pouvoir absolu», avendo saputo ingannare gli uni e gli altri; perciò ne mette in luce la doppiezza[53], e cerca di difendersi dall'accusa di complicità con l'ex imperatore ai tempi dell'*Entretien politique,* mossagli da Gohier[54].

Negli anni seguenti, però, si afferma sulla rivista, di matrice borghese, una sostanziale presa di posizione favorevole a Napoleone, riconosciuto come il vero rappresentante della borghesia uscita vincitrice dalla Rivoluzione[55]: egli mostra «la sagacité du vrai politique» nei colpi di stato del 18 fruttidoro prima e del 18 brumaio poi, perché «la plupart des Francais reçurent avec plaisir un gouvernement plus fort»[56]. Non solo; la vita di Napoleone è stata una lotta contro l'Inghilterra, a vantaggio della Francia: «Le génie de cet homme extraordinaire s'était proposé l'abaissement de l'Angleterre non moins que l'élévation de la France»[57].

Tale rivalutazione avviene sia in funzione antiborbonica, per l'appoggio inglese ricevuto dalla monarchia restaurata, sia poi contro Luigi Filippo d'Orléans, i cui sostenitori, gli esponenti del *juste milieu,* o *dottrinari*, sono accusati di *anglomanie*, in politica e in filosofia[58].

---

[52] Così definito da Simonde de Sismondi nella sua recensione al *Tableau des révolutions du système politique de l'Europe, depuis la fin du quinzième siècle, par M.F. Ancillon*, R.E., 1823, XVIII, p. 548.

[53] *Ibidem*, nella lunga nota alle pp. 548-549.

[54] L. Gohier, *Mémoires des Contemporains pour servir à l'histoire de France, et principalement à celle de la république et de l'empire*, R.E., 1824, XXII, pp. 432-436 (Gohier era presidente del Direttorio il 18 brumaio).

[55] J.-P. Pagès fa notare nel 1831 che il partito bonapartista è ancora quello al primo posto tra i partiti all'opposizione del governo monarchico.

[56] F__x [sic], *Mémoires pour servir à l'histoire de France sous Napoléon, écrits à Sainte-Hélène par les généraux qui ont partagé sa captivité, et publiés sur les manuscrits entièrement corrigés de la main de Napoléon*, *Tomes I-VIII*, R.E., 1825, XXVII, p. 383.

[57] M. Avenel, *Vie de Napoléon Bonaparte, empereur des francais, avec un tableau préliminaire de la révolution francaise, par sir Walter Scott*, R.E., 1827, XXV, p. 656.

[58] P.-M. Laurent, *De la modération politique*, R.E., 1831, LII, pp. 572 ss.

Così Laurent può annoverare, fra i grandi uomini della storia, accanto a Robespierre, anche Napoleone[59], incarnando la traiettoria che porta il repubblicanesimo, attraverso la Restaurazione e la «monarchia borghese», al secondo Impero, sotto il quale il giornalista ricoprirà importanti cariche pubbliche.

Infine, anche Jullien, ricordando un passato glorioso evocato dal nome di Napoleone, nel 1831 suggerisce, nell'impossibilità di creare un governo repubblicano in Grecia, la candidatura al trono del «jeune Napoléon».

8.3. *Contro gli ultramontani e i gesuiti*

La «Revue Encyclopédique» tutela le libertà gallicane a fronte del tentativo di restaurazione del potere della Chiesa di Roma, prima con il Concordato, poi con la Congregazione dei gesuiti.

Il recente Concordato del 1817 aveva confermato quelli del 1801 e del 1813, ossequienti nei confronti della Chiesa di Roma; era perciò caduto nella riprovazione generale e non divenne mai legge dello Stato. Un paio di articoli di Lanjuinais aprono la sezione delle scienze morali e politiche dei due primi tomi del 1819, con la recensione di un'importante *brochure* di De Pradt, *Les quatre Concordats*.

Lanjuinais rimprovera a De Pradt di essere caduto in contraddizione, affermando da un lato lo stretto rapporto tra il nuovo governo rappresentativo e le libertà della Chiesa di Francia, dall'altro la legittimità dei Concordati, favorevoli all'istituzione dei vescovi ad opera della Chiesa di Roma. L'errore di De Pradt è dovuto al presupposto della separazione assoluta tra Stato e Chiesa, foriera di disordini sociali: «admettez le système d'ultramontanisme qui infecte nos séminaires d'aujourd'hui; et joignez-y celui de *séparation absolue* du spirituel et du temporel, vous avez à l'intérieur un état de discorde, et peut etre un état de guerre insupportable»[60].

Nel 1821, dal trionfo della reazione, nasce la *Congrégation*, associazione segreta e occulta creata dai gesuiti, già banditi dal regno e ora rinati come *Pères de la foi*, con esponenti in seno alla famiglia reale nel ruolo di confessori; a questa funesta alleanza sono dovute la nascita del ministero Villèle, e, nel 1823, la guerra di Spagna.

---

[59] H.C. [sic], *Réfutation de l'Histoire de France de l'abbé de Montgaillard, par P.-M. Laurent*, R.E., 1828, XL, pp. 630 ss.

[60] M. De Pradt, *Les quatre Concordats, par M. le comte de Lanjuinais*, R.E., 1819, I, p. 260.

I *Pères de la foi* fondano collegi per l'istruzione dei giovani delle famiglie aristocratiche e alto borghesi in vista della formazione delle classi dirigenti, nello spirito del più acceso fanatismo, estendendo la loro influenza anche al di fuori della Francia: Jullien denuncia nel 1823 le «persécutions inouies auxquelles a été en butte, dans le canton de Fribourg, en Suisse» il progetto educativo di Padre Girard, fondatore e direttore dell'*École francaise*, uno dei «bienfaiteurs de l'Humanité..., victimes de la violence et de la fureur des sectes religieuses».

In politica estera la maggioranza di governo decide la spedizione contro i moti insurrezionali spagnoli. Dopo la morte del collaboratore della «Revue Encyclopédique», Juan Antonio Llorente, uomo di chiesa aperto alle idee liberali, causata dalla sua espulsione dalla Francia, la rivista gli dedica un lungo articolo commemorativo per la penna di Mahul, e una recensione della sua ultima opera da parte di Lanjuinais. Il 13 marzo dello stesso anno per aver abbozzato l'apologia della Convenzione è espulso dalla Camera don Manuel, deputato della Vandea del quale Jullien aveva già nel 1821 tessuto le lodi poiché costantemente e ingiustamente perseguitato, e, alla sua morte, nel 1827, renderà omaggio ad uno degli uomini politici che hanno «servi et honoré leur patrie et l'humanité par […] des talens supérieurs, et surtout par un noble caractère».

Profonda la critica di Mahul al potere dei gesuiti in Francia: esso è «injuste, illégitime et mauvais, quelle que soit d'ailleurs l'antiquité dont il s'appuie, le titre dont il se pare, et la force dont il dispose», poiché nega i diritti di «penser, agir, posséder librement» che appartengono all'uomo per la sua stessa natura, e sui quali si fonda il Vangelo[61].

Dopo il ristabilimento della legge del 1822 sulla censura per i casi gravi, la *Congrégation* approfitta del silenzio forzato della stampa per accrescere il suo potere, e viene istituito un ministero degli affari ecclesiastici cui è affidata l'istruzione pubblica. Nel *Coup d'oeil sur les progrès des connaissances humaines, en 1824* Jullien si duole di aver visto stigmatizzare la democratizzazione dell'istruzione primaria insieme al metodo del mutuo insegnamento, in un momento «où le pouvoir ecclésiastique menace de déborder et d'envahir tous les autres».

La «Revue Encyclopédique» attacca apertamente la *Congrégation* approvando la petizione di M. de Montlosier, ex membro della Costituente nel 1789, che nel 1826, anno segnato da sommosse a Rouen, Brest e Lyon, dal montare dell'audacia del partito clericale e dei missionari, pubblica le *Mémoires à*

---

[61] A. Mahul, *Tableau de l'histoire philosophique du Christianisme, par C. Coquerel*, R.E., 1823, XX, pp. 56-64.

consulter sur un système religieux, politique et tendant à renverser la religion, la politique et le trone, e le sottopone alla Camera dei Pari. Essa accoglie la petizione, per ciò che concerne l'esistenza di una società religiosa non legalmente autorizzata, e la rinvia al consiglio dei ministri, il che guadagna a Montlosier il plauso dei liberali.

La rivista sottolinea il valore storico di una denuncia implicita che, richiamandosi al nuovo regime costituzionale quale garanzia delle libertà civili, politiche e religiose della Francia, rivendica le libertà gallicane. Montlosier, pur non essendo un liberale ma un fervente cattolico e un realista convinto, nel suo scritto «s'est montré l'homme de la France», poiché «il voit la religion, la France, l'autorité royale gravement menacées par le système dont il se porte l'accusateur», indicando «dans nos lois anciennes et dans nos lois nouvelles» i mezzi «pour combattre le système et le réprimer»[62].

Nel *Coup d'oeil sur les progrès des sciences, des lettres et des arts en 1826* Jullien registra la proliferazione degli scritti politici che sostengono il partito clericale; e nella scomparsa di Lanjuinais, il 13 gennaio 1827, vede «une grande calamité publique», in un momento di pericolo per la libertà d'opinione.

8.4. *Altre violazioni della «Charte»*

Dopo le elezioni del 1824, i cui brogli vengono denunciati dalla «Revue Encyclopédique» con la recensione, a firma di Avenel, dell'*Annuaire historique universel pour 1824* di Lesur, è approvato il progetto sulla settennalità del Parlamento (a dispetto della legge che prescriveva per la sessione il limite dei cinque anni) all'evidente scopo di consolidare la maggioranza *ultra*: contro tale progetto si pronuncia la «Revue Encyclopédique» con un articolo di Lameth.

In seguito alla morte di Luigi XVIII a metà settembre, il regno di Carlo X esordisce con progetti di legge apertamente provocatori, tra cui quello di conversione delle rendite, che accorda 1 miliardo all'emigrazione come indennità: sulla rivista si oppone Avenel.

Ma la misura più ostile alla grande borghesia imprenditoriale è il ristabilimento del diritto di primogenitura per i nobili, e quello della mano morta per gli ecclesiastici, che immobilizza la terra e comprime l'iniziativa individuale. A sanzionare i provvedimenti reazionari, l'incoronazione di Carlo X a Reims il 29 maggio 1825, con un cerimoniale gotico per nulla in linea con i tempi nuovi; in novembre invece un'imponente manifestazione popolare ai funerali del

[62] U. [sic], *Mémoires à consulter* […] *par le comte de Montlosier*, R.E., 1826, XXX, p. 371.

generale Foy, uno dei più brillanti capi dell'opposizione liberale, rivela i veri sentimenti della nazione. Sulla «Revue Encyclopédique» Jullien sollecita la «reconnaissance nationale» nel provvedere al mantenimento dei figli del «défenseur des libertés publiques» che, «ne s'occupant que de la patrie, négligea les soins de sa fortune». A lui dedica un omaggio in versi, in cui esalta l'«implacable ennemi du pouvoir arbitraire»; in effetti le esequie vengono seguite da più di 100.000 persone, e i figli di Foy vengono adottati in nome della patria.

In uno sguardo retrospettivo sul 1825, sono denunciati dalla «Revue Encyclopédique» i numerosi attentati alla Costituzione e gli abusi d'autorità, non più giustificati dal timore di rigurgiti rivoluzionari[63], e lo stesso Jullien, nella *Récapitulation de l'année 1825*, afferma che le scienze morali e politiche non hanno registrato alcun avanzamento.

8.5. *Contro le leggi sulla censura*

Dopo la legge sulla stampa del 1822, detta *de tendence*, che reintroduce la censura, a fine dicembre 1826, su pressione di Carlo X, divenuto docile strumento della *Congrégation*, il governo decide di imbavagliare la stampa, rea di aver denunciato i gesuiti, con il progetto di legge detto beffardamente *de justice et d'amour*. Già all'inizio del 1827 la «Revue Encyclopédique» interviene prima con un articolo di Jullien che recensisce l'*Epitre aux Chiffonniers sur les crimes de la presse* di Viennet, poi con un intervento di Charles Renouard. Jullien parla di un «projet de loi vandale qui est une insulte publique à une nation éclairée».

Come avvocato, Renouard riprende la definizione data al nuovo progetto di legge sulla stampa come «acte d'accusation dressé contre la société francaise» – composta da scrittori, stampatori, magistrati e soprattutto lettori – perché condanna a morte la libertà.

Perfino Chateaubriand, esponente di spicco degli intellettuali, membro della Camera dei Pari, vota contro il progetto di legge, e si guadagna il plauso della «Revue Encyclopédique» per le sue posizioni liberali: «La France [...] prépare des lauriers immortels pour le défenseur des Grecs et de la liberté de la presse».

In risposta alle coraggiose proteste dell'*Académie francaise*, sono licenziati tre dei suoi insegnanti, Villemain, Lacretelle e Michaud; il ministero ritira

---

[63] Ch. Dupin, *De l'ordre légal en France, et des abus d'autorité, par M. Duvergier d'Hauranne*, R.E., 1826, XXIX, pp. 436-437.

comunque il progetto di fronte all'intenzione dei Pari di respingerne gli articoli più severi. Dopo il decreto di licenziamento della guardia nazionale il 30 aprile, e di fronte alle conseguenti proteste della stampa, con la chiusura della sessione Carlo X ristabilisce arbitrariamente la censura (24 giugno), e sospende i corsi di Cousin e di Guizot alla Scuola Normale.

Ma sarà solo l'anno seguente, dopo la caduta del ministero Villèle, che la «Revue Encyclopédique» traccerà un quadro esauriente della situazione, con elezioni-farsa, giornali comprati o costretti al silenzio, distruzione della scuola normale, progressiva rovina della scuola primaria e la censura quale coronamento di quest'opera tenebrosa, in odio all'immensa maggioranza di una grande nazione.

8.6. *Le elezioni del 1827 e la ripubblicazione dei brani censurati*

Contro il ristabilimento della censura si levano, concordemente, la Camera dei Pari e, alla Camera dei Deputati, i realisti moderati e liberali, mettendo in minoranza il ministero; l'Assemblea è allora sciolta il 5 novembre, e sono nominati 76 Pari, scelti tra i grandi proprietari, con l'intento, da parte di Villèle, di avere una maggioranza a lui più favorevole.

La «Revue Encyclopédique» è penalizzata dalla censura nei numeri da luglio (tomo XXXV) ad ottobre (tomo XXXVI); ma, con la proclamazione di nuove elezioni, potrà segnalare, a novembre, i brani sacrificati, la cui pubblicazione «suffira pour faire connaitre dans quel esprit et sous quelle influence était exercée l'inquisition littéraire, chargée d'opprimer, d'étouffer, de mutiler la pensée»[64].

Era stato eliminato infatti ogni riferimento o articolo celebrativo di personaggi della storia o della politica attuale, quali, in Spagna, i combattenti della rivoluzione del 1820 come il generale Riego, e Juan van Halen, e, in Francia, l'ex deputato e legislatore Manuel, nonché un encomio del generale Foy. Erano stati tagliati gli articoli a favore del collegio filosofico di Lovanio sede di «un clergé catholique, élevé dans l'esprit d'une tolérance vraiment chrétienne», come quelli a favore della chiesa riformata, fautrice di un'interpretazione razionale del Vangelo; erano stati mutilati perfino gli articoli su Montesquieu, il quale dipingeva nelle *Lettres persanes* il quadro di un clero ambizioso che moltiplica i conventi a spese dello Stato, affermava che la

[64] *ERRATA: Exigés par les supressions partielles de la CENSURE, dans quelques articles des cahiers de Juillet, d'Aout, de Septembre et d'Octobre, N. du R.*, R.E., 1827, XXXVI, p. 531.

religione deve essere a servizio dello Stato e non viceversa, e, nelle *Pensées diverses*, giudicava gli ecclesiastici troppo spesso come adulatori dei principi, se non come tiranni.

La stessa sorte era toccata ad un articolo di Sismondi su un'opera di Alexander von Humboldt, l'*Essai politique sur le Royaume de la Nouvelle Espagne*, in cui era criticata la conversione forzata degli Indiani ad opera dei missionari gesuiti; era stato soppresso anche un passo sul «Washington de l'Amérique du Sud», ovvero Simon Bolìvar.

Anche sulla politica economica era intervenuta la censura, sopprimendo la critica di Ferry all'esposizione dei prodotti delle manifatture francesi, che costituiva uno spreco di denaro pubblico senza alcuna utilità per il commercio. Di lì a poco, la «Revue Encyclopédique» commentava lo stato attuale della cultura come in balìa delle lotte politiche, senza garanzie né nelle leggi, né nelle istituzioni. Per sfuggire alla censura, essa avrebbe dovuto rinunciare alla sezione delle scienze morali e politiche, venendo meno al suo compito: «si elle consentait à un aussi grand sacrifice, elle renoncerait à son titre et cesserait d'etre *encyclopédique*. Aucune considération ne la fera descendre ainsi au-dessous d'elle meme»[65].

8.7. *Una libertà riconquistata?*

Con la vittoria dei liberali, Villèle, dopo sette anni di governo, è costretto a dimettersi, e il 4 gennaio 1828 è formato un gabinetto sotto la guida di Martignac, un nobile di tendenza dottrinaria, che incontra in un primo tempo il favore della sinistra e, segnatamente, della «Revue Encyclopédique».

In effetti il 18 luglio è abolita la censura per la stampa periodica, e sono emanate due ordinanze, che sottraggono agli ecclesiastici la direzione delle scuole secondarie sottoponendole al regime universitario: si intende colpire in particolare i gesuiti che ne possedevano la maggioranza. Ciò scatena la loro reazione: essi, nemici di tante altre libertà, paradossalmente si appellano alla libertà d'insegnamento.

La «Revue Encyclopédique» pubblica una dissertazione, premiata dall'*Académie francaise* il 25 agosto 1828, in cui l'autore, richiamandosi alla petizione di Montlosier di due anni prima, conviene che si tratta dello stesso problema, quello di «appliquer contre les gésuites une législation hostile à la liberté». Tuttavia ritiene che sia meglio l'esistenza di una cattiva legge piuttosto che l'applicazione

---

[65] *Considérations générales sur la république des lettres, en 1827* (art. non firmato), R.E., 1828, XXXVII, pp. 8-9.

arbitraria della legge stessa, permettendo ai gesuiti di interpretarla allo scopo di sottrarsene e, nello stesso tempo, costringendo gli altri a rispettarla. Per cui, «au lieu de favoriser ainsi la marche naturelle des jésuites et de les laisser échapper en entr'ouvrant la porte des interprétations, il est bon qu'emprisonnés avec nous dans la législation, ils ne puissent devenir libres qu'en la brisant pour leur avantage et pour le notre»[66].

La «Revue Encyclopédique» presenta il *livre noir* del ministero caduto, definito come *déplorable*, un sistema di polizia basato sullo spionaggio[67], che non ha risparmiato nemmeno il mondo della cultura; e auspica la ripresa del progetto di una *république des lettres* che «subsistera aussi long-tems que la raison humaine», nonché la propagazione delle «connaissances usuelles» per un pubblico più vasto.

Le aspettative di riforma si estendono al campo dell'economia e dell'amministrazione pubblica: Jullien, in nome dell'*esprit d'association*, si augura la ripresa del progetto della *Société Commanditaire de l'Industrie*, che si proponeva di investire capitali in imprese agricole, commerciali e industriali, rimasto sulla carta nel 1825 per non aver ottenuto l'approvazione del governo, vittima dei pregiudizi, propri degli ambienti *ultras* nei confronti di una aristocrazia che «mancherebbe di dignità» nell'allearsi con uomini di finanza e di industria. Adolphe Blanqui, in nome della libertà di commercio, saluta come un buon inizio di riforma la commissione d'inchiesta istituita in Francia nel 1829 sotto il ministero Saint-Cricq, per risolvere la crisi industriale. Questa è dovuta alle «industries privilégiées qui ont grandi à l'ombre des tarifs».

Charles Comte protesta per il ritiro di due progetti di legge sull'organizzazione comunale e dipartimentale, che costituirebbero comunque un inizio di riforma, invisi ai liberali perché non in armonia con la Carta costituzionale; in realtà essi tornano a vantaggio della *petite aristocratie bourgeoise*, proprietaria dei nove decimi del suolo, e perciò maggiore contribuente della nazione, ma esclusa dal diritto elettorale.

8.8. *Speranze deluse: la* Congrégation *al governo*

Alla votazione dei progetti di legge sulla riorganizzazione degli enti locali una coalizione della destra e una della sinistra mettono in minoranza il governo Martignac; il re nomina allora Polignac, rappresentante della *Congrégation*,

---

[66] C.R. [sic], *L'éducation doit-elle etre libre?*, R.E., 1828, XL, p. 17.

[67] *Le livre noir de MM. Belavau et Franchet, ou Répertoire alphabétique de la police politique sous le ministère déplorable; ouvrage imprimé d'après les registres de l'administration; précédé d'une Introduction par M. Année, M.-A. Jullien*, R.E. 1829, XLI, pp. 514-516.

prima agli Esteri, poi, in novembre, alla presidenza del Consiglio. Sulla «Revue Encyclopédique» Avenel, risalendo alla causa storica della nascita di un simile governo, la indica nel famigerato cambiamento della legge elettorale voluto dai ministri Decazes e de Serre nel 1819.

Con l'aumento dell'ostilità governativa verso la «Revue Encyclopédique» Jullien affianca alla direzione, già alla fine del 1829, il figlio Auguste, ma non rinuncia alla battaglia politica. Se già nel marzo 1830 prevede una nuova rivoluzione, a giugno confuta il pessimismo sulle sorti della Francia espresso da Gohier sul letto di morte, e riassunto nei versi improvvisati sulla sua tomba: «Gohier mourant disait, en son dernier émoi / Mon pays est encore plus malade que moi». La Francia infatti, secondo Jullien, «sortira bientot triomphante de la crise nouvelle»[68]. Dopo l'emissione delle tre Ordinanze, il 26 luglio, di cui la prima colpisce la libertà di stampa, dagli uffici del *National* Thiers redige la famosa protesta che viene firmata da 44 giornalisti di diverse testate, e che scatena la ribellione.

8.9. *«Vive la République!», o no?*

Jullien celebra la fine della monarchia: «La CHARTE, des Francais commune garantie / Servait à réunir le trone et la patrie. / Elle n'existe plus. La patrie est en deuil, / Et du trone déjà s'entr'ouvre le cercueil»[69].

Ma la stampa liberale, dopo aver preparato la rivoluzione, la sottrae ai repubblicani e la orienta verso Luigi Filippo d'Orléans, del ramo cadetto dei Borbone, celebrato come il *roi citoyen*: il 31 luglio una deputazione della Camera lo invita ad assumere la luogotenenza generale del regno, senza consultare la nazione, nemmeno per ratificare la decisione. La vecchia opposizione liberale, monarchico-costituzionale, si erge a paladina della classe media e della finanza, teorizzando il sistema del *juste milieu,* o della *quasi-légitimité* (Guizot), definito sulla «Revue Encyclopédique» «adultère monstrueux de la souveraineté populaire et du droit divin»[70].

Dal 30 luglio inizia l'opposizione democratica e repubblicana in Francia: è il giorno in cui viene fondata la società degli *Amis du peuple*, di ispirazione repubblicana, ed è allestito il primo numero del giornale *La Révolution*; fino

---

[68] M.-A. Jullien, *Souvenirs politiques de la Révolution et de l'Empire: Vers*, R.E., 1830, XLVII, pp. 320 ss.

[69] Si tratta di versi improvvisati per l'occasione e aggiunti ai precedenti.

[70] A. Petetin, *Revue politique*, R.E., 1831, L, p. 6.

alle giornate del giugno 1832 le società popolari costituiranno «un'attiva palestra di idee politiche»[71]. Di tale opposizione anche Jullien entra a far parte, distanziandosi dai liberali e dallo stesso Sismondi. Questi, preoccupato per un possibile isolamento politico della Francia in Europa, raccomanda l'unità nazionale intorno al nuovo governo: «Laissons aux amis de Charles X le soin de former l'opposition […]; notre affaire à nous, qui voulons etre libres, c'est d'etre aujourd'hui *ministériels*»[72]. Al che Jullien ribatte, in una nota a questo stesso testo, che «pour que les patriotes soient *ministériels*, il faut avant tout que le ministère soit lui-meme *patriote»,* ovvero «qu'il accepte sans hésiter toutes les conséquences nécessaires de la révolution». Tra queste, l'abbassamento del censo elettorale e il libero accesso di tutti i cittadini nella Guardia nazionale, senza pregiudizi basati sulla proprietà: in un articolo di Ferry, in cui si espongono tali richieste, Jullien vede una logica severa contro cui confliggono i pregiudizi delle moderne oligarchie «où le peuple presque entier est exclu du droit de suffrage, et n'est compté que pour la part d'or et de sang pour laquelle il contribue à servir le pays»[73].

Dal 1° aprile 1831 Jullien scinde il suo destino da quello della «Revue Encyclopédique», facendosi sostituire dal figlio Auguste e da Anselme Pétetin: questi, insieme ad una redazione di fede repubblicana, raddoppia le bordate contro il *modérantisme* del governo della *quasi-restauration*, retto dal *parti doctrinaire*[74].

Sulla rivista Jullien interviene ancora con alcuni articoli, e, in uno di essi, nella veste inusuale di critico d'arte, ricorda con nostalgia l'Hotel de Ville, teatro delle «grandes journées de juillet, où […] les masses populaires, presque désarmées, mais puissantes par le nombre, par l'énergie, par le sentiment de leur force et de leurs droits, ont attaqué, emporté, puis abandonné ce poste important, qui est resté définitivement au pouvoir du peuple». Ma deplora anche il nuovo governo, e si spinge addirittura a predire un nuovo, violento rivolgimento politico. Questo avverrà con la Rivoluzione del febbraio 1848, e con l'istituzione della Seconda Repubblica, che il *citoyen Jullien* approva, a pochi mesi dalla morte, il 28 ottobre, con queste parole:

---

[71] Cfr. A. Galante Garrone, *Filippo Buonarroti e i rivoluzionari dell'800*, Einaudi, Torino 1951, pp. 99 ss.

[72] J.C.L. Simonde de Sismondi, *L'Avenir*, R.E., 1830, XLVII, pp. 528-529.

[73] Ferry, *Droits restitués aux Francais par la Révolution de 1830. Garde nationale, Elections, Chambres Législatives*, R.E., 1830, XLVIII, pp. 578 ss.

[74] P.-M. Laurent, *De la politique extérieure de la France depuis la révolution de 1830*, R.E., 1831, LI, pp. 441 ss.

«La République était le seul remède à de si grands maux. Par elle, le pays reprend ses droits, sa dignité, son influence légitime et traditionnelle sur la civilisation du monde»[75].

9. Politica estera e colonizzazione

La grande battaglia per la *civilisation*, condotta dalle *scienze morali e politiche*, vede la «Revue Encyclopédique» impegnata sul fronte della politica estera in nome del principio di autodeterminazione dei popoli; di qui l'interesse per le «productions qui n'ont souvent d'autre caractère distinctif que d'annoncer le réveil d'un peuple, ou son entrée à la vie sociale, ou quelques faibles efforts au milieu de sa léthargie». Ma la tendenza progressiva delle nazioni verso uno sviluppo più libero e completo delle facoltà individuali e degli elementi di prosperità sociale, lungi dall'essere favorita da tutti i governi, «est entravée et presque étouffée par des mesures oppressives, injustes et arbitraires»[76]: misure prese dal Congresso di Vienna, definito come un «Sénat aristocratique» che, in nome del principio di legittimità, ha imposto quelle «intolérables chaines qui réunissent sous le meme joug les nations les plus diverses de moeurs et d'opinions»[77].

D'altro lato la Francia, come già per Napoleone, deve giocare un ruolo di primo piano nel processo di unificazione dell'Europa, in quanto «centre et foyer de la civilisation européenne», per «sa position géographique et l'esprit de sociabilité» e anche per il sistema «du pouvoir et de la liberté», garantito dalla *Charte* di Luigi XVIII; a livello internazionale, il processo di *civilisation,* anche qui coerentemente con il disegno napoleonico, deve essere il mezzo per una *colonisation* in vista di sbocchi commerciali, secondo il modello *industrialista*.

Il nuovo equilibrio geopolitico indicato dalla «Revue Encyclopédique» si impernia su tre superpotenze: accanto alla Francia, per la sua priorità culturale, trovano posto l'Inghilterra e la Russia, che non hanno rivali, l'una sul mare e l'altra sulla terra[78]. Di qui la spartizione delle colonie: la Francia, portando a

---

[75] Cfr. E. Di Rienzo, *Marc-Antoine Jullien de Paris*, cit., p. 332 n.

[76] M.-A. Jullien, *Relevé sommaire des travaux scientifiques et littéraires, mentionnés dans la «Revue Encyclopédique», pendant le cours de l'année 1821*, R.E., 1822, XIII, p. 15.

[77] M.-A. Jullien, *Lettre à MM. Les Collaborateurs, les Correspondans, et les Souscripteurs de la «Revue Encyclopédique»*, R.E., 1820, V, p. 7.

[78] Ch. Dupin, *Parallèle de la puissance anglaise et russe, par M. de Pradt*, R.E., 1823, XX, pp. 65 ss.

termine la conquista di Algeri, iniziata nel 1830, potrà avanzare nel continente africano per rifarsi della perdita delle colonie nelle Antille; l'Inghilterra verso l'impero dell'India e la Russia verso quello del nord dell'Asia, a scapito della Turchia.

9.1. *Per l'indipendenza delle popolazioni irredente*

Jullien, che già in passato aveva dato consigli a Napoleone e poi ad Alessandro I, propone allo zar Nicola, appena succeduto a quest'ultimo, un nuovo ordinamento europeo sulle rovine dell'impero turco. Infatti la «Revue Encyclopédique» appoggia la guerra d'indipendenza greca, quale lotta per eccellenza della *civilisation* per la difesa della causa del Cristianesimo, cui le potenze europee devono partecipare attivamente: «Réveillons-nous […] au nom du christianisme, au nom de l'humanité!»[79], senza dimenticare i vantaggi economici «des débouchés et des comptoirs au commerce de tous les pays», e quelli politici. Infatti la Russia, secondo Jullien, dovrebbe fornire all'Europa una doppia garanzia, «par l'organisation d'un état fédératif et indépendant dans la Grèce, par l'établissement d'un royaume constitutionnel et indépendant dans la Pologne»: queste due nazioni costituirebbero altrettante barriere per arginare futuri progetti di conquiste. Nello stesso tempo, anche l'Italia potrebbe avvantaggiarsi di un'eventuale spartizione fra Russia e Austria dei territori della Turchia in Europa – Moldavia, Valacchia e Serbia – come indennità per le perdite subite[80].

Tali aspettative verranno deluse: per ciò che concerne la Grecia, dopo l'intervento armato di Russia, Francia e Inghilterra, l'indipendenza verrà ottenuta nel 1829, ma il governo non sarà una repubblica federativa, e neppure un impero retto dal figlio di Napoleone, come la Francia e lo stesso Jullien si auguravano, ma una monarchia con a capo un membro della dinastia di Sassonia-Coburgo, nella «Revue Encyclopédique» aspramente criticato, perché imposto dall'alto – soprattutto non dalla Francia.

Quanto alla Polonia, la delusione è più cocente, per l'ingratitudine dello stesso governo francese: Jullien, grande amico del generale Kosciuszko, nonché autore della sua prima biografia (1818), esorta le potenze europee, e in primo luogo la Francia, a non abbandonare la Polonia che, dopo aver contribuito con le sue legioni alle più gloriose vittorie della Rivoluzione dell'89

---

[79] J.C.L. Simonde de Sismondi, *Histoire de la régénération de la Grèce, par F.C.H.L. Pouqueville*, R.E., 1825, XXVI, p. 385.

[80] E. Blaquières, *La Grèce après sa cinquième campagne, en 1825*, R.E., XXVIII, p. 695.

sulle coalizioni antifrancesi, vede fallire il sogno di indipendenza nei primi mesi del 1831, dopo una lotta disperata. La rivista rende pubblico il *Manifeste du peuple polonais*, nel quale un popolo oppresso giustifica il ricorso alle armi per difendere la libertà.

Della questione italiana Jullien si occupa attraverso Francesco Saverio Salfi, suo amico dai tempi della repubblica napoletana, singolare figura di cospiratore e di riformista ad un tempo, e collaboratore della «Revue Encyclopédique» dal 1819 al 1829. Nella recensione al suo scritto pubblicato anonimo nel 1821, *L'Italie au dix-neuvième siècle, ou de la necessité d'accorder le pouvoir avec la liberté*, in un momento in cui la sua nazione diventa «le théatre d'événémens historiques d'une haute importance», Salfi, unendo la «modération» e «l'amour de la liberté et de l'indépendance», afferma la necessità di accordare delle costituzioni rappresentative ai singoli stati italiani e una costituzione federativa a tutto il territorio.

Dopo la rivoluzione di Luglio, Charles Didier suggerisce una soluzione più radicale: attribuendo il fallimento dei moti romagnoli del 1831 al mancato coinvolgimento del popolo, assegna all'Italia il compito di «le rallier au progrès social». Infatti le terre italiche sono state arate dalla Repubblica dell'89, che «y a jeté la semence populaire», per cui le prime condizioni della nuova società sono l'indipendenza e l'unità.

La «Revue Encyclopédique» condanna anche la politica estera del nuovo governo di Luigi Filippo, chiedendosi, con Laurent, se sia il frutto non di una vera rivoluzione, ma di un semplice cambio di ministri: egli critica in particolare Thiers e Guizot, esponenti del *juste milieu* che si sono così preoccupati di rassicurare l'Europa della Santa Alleanza da permettere all'Austria di estendersi in Italia nella Romagna, alla Prussia di occupare il Lussemburgo, alla Russia di invadere la Polonia e all'Inghilterra di regnare in Belgio. Col principe Leopoldo della dinastia anglo-tedesca di Sassonia-Coburgo Gotha infatti, al nuovo Belgio indipendente, già parte della Francia, viene negata non solo una forma repubblicana di governo, ma anche una monarchia di discendenza napoleonica – verosimilmente ritenuta, in quanto francese, più legittima sia dei Borboni sia dei rami cadetti.

9.2. *Capitalismo e colonizzazione*

La ricerca di nuovi mercati quali sbocchi alla sovrapproduzione capitalistica è mascherata dalla necessità di «civilizzare» i popoli portando loro i benefici dei Lumi: insieme al benessere economico e al progresso scientifico, anche la pace sociale e quella fra le nazioni. Nella campagna della «Revue Encyclopédique» per l'indipendenza delle ex colonie europee, la *colonisation* è vista come

«l'avancement dans la civilisation», quale unico titolo di legittimità della sovranità da parte di una nazione, in quanto provvista di un più alto significato «morale»[81]: con ciò Sismondi stigmatizza la colonizzazione dell'India ad opera dell'Inghilterra attraverso la Compagnia delle Indie Orientali. Infatti il governo inglese, anche se non ne ha ricavato molti profitti – come è stato osservato da Say – è comunque responsabile dello sfruttamento della popolazione indigena da parte della Compagnia, che mantiene la rigida divisione sociale in caste, impedendone lo sviluppo economico: «uniquement occupée d'arracher au pays qu'elle gouverne un tribut qu'elle puisse porter en Angleterre, elle ne veut pas permettre que la moindre partie du revenu public soit employée au bien du peuple qui le paie». Altrettanto mortifera è la negazione delle libertà civili, la più importante fra tutte quella di stampa, allo scopo di impedire il dissenso.

Nel suo entusiasmo per la liberazione delle colonie dell'America Centromeridionale, la «Revue Encyclopédique» accetta di buon grado la perdita di Santo Domingo, assorbita nella Repubblica di Haiti a partire dai primi anni dell'800: là i figli d'Africa hanno dimostrato di essere uomini, sapendo apprezzare «la lumière et la vertu». Lo stesso discorso vale per le cinque grandi Repubbliche di Colombia, Buenos-Ayres, Cile, Perù e Messico. Ma la spinta colonizzatrice della Francia non si esaurisce, e viene dirottata in Africa, vista come un continente in preda agli Arabi musulmani, con il rischio, per gli Europei, di essere schiavizzati, complici le scorrerie dei pirati barbareschi che danneggiano gravemente i commerci.

Così, se un'avventura in Africa potrebbe costituire un «riche dédommagement pour la perte de Saint-Domingue», per gli sbocchi alle manifatture e al commercio francesi[82], un intervento armato dell'Europa in Algeria si dimostra sempre più urgente, per liberare questo stato dalle milizie dei Turchi levantini, ancora preda della barbarie più efferata. È così che Sismondi approva la spedizione di Carlo X contro Algeri il 25 maggio 1830: si tratta di «une guerre juste», perché contro un paese «en dehors du doit des nations»[83].

9.3. *La battaglia per l'abolizione della tratta e della schiavitù*

Alle decisioni del congresso di Aix-La-Chapelle del 1818, che si pronuncia per l'abolizione definitiva della tratta, l'alta aristocrazia e il governo francese

---

[81] J.C.L. Simonde de Sismondi, *Recherches sur la convenance du système colonial pour le gouvernement de l'Inde*, R.E., 1824, XXIV, pp. 635 ss.

[82] Chauvet, *Notice sur la civilisation de l'Afrique*, R.E., 1828, XXXVII, pp. 329 ss.

[83] J.C.L. Simonde de Sismondi, *De l'expédition contre Alger*, R.E., 1830, XLVI, pp. 257 ss.

si oppongono perché l'Inghilterra, nel farsi paladina di questo provvedimento, rivendica il diritto di ispezionare le navi altrui per impedire il contrabbando degli schiavi. Ora, ammessa la buona fede del governo inglese, a favore della quale argomenta, Babey si chiede come si possa parlare in nome dell'interesse personale contro «la raison, l'humanité, la justice et meme la politique», cosa che rende inefficaci le leggi emanate dalla Francia, nell'aprile 1818, e nello stesso mese del 1827 per la repressione della tratta.

La rivoluzione del 1830 alimenta le speranze degli economisti borghesi che, sotto la bandiera del diritto dell'uomo alla libertà, si preoccupano sempre più di garantire gli interessi dell'industria e del commercio: Dufau, se da un lato riconosce che, a differenza dell'antico schiavo, vinto in battaglia, lo schiavo dell'età moderna è «vile merce», il cui *status* comporta la degradazione morale, d'altro lato non chiede la liberazione degli schiavi, ma la loro trasformazione in operai salariati, nell'ottica dello sfruttamento capitalistico. Infatti ammette come tesi generale l'utilità delle colonie per l'offerta di sbocchi ai prodotti della metropoli, con in cambio l'invio di derrate che corrispondono alle sue prime necessità, ma fa notare che il gran numero degli schiavi negli estesi territori coloniali non produce quella quantità di cotone necessario che sarebbe prodotto da un minor numero di lavoratori 'liberi', con migliori mezzi di coltivazione della terra. Su questo punto vi è stato il completo accordo di tutti gli economisti da Smith a Say. È necessario poi che l'abolizione della schiavitù sia graduale: posto che la proprietà della terra e degli schiavi è legittimata dalla società, questa, però, in nome della sicurezza pubblica – il gran numero degli schiavi può essere pericoloso per eventuali sommosse, come accaduto a Santo Domingo nel 1791 – può modificare l'esercizio dei diritti del proprietario, in cambio di un'indennità[84].

10. La svolta sansimoniana, e poi socialista

Con la sconfitta delle sinistre alle elezioni di luglio, Jullien, che vede bocciata la sua candidatura alla Camera, e in gravi difficoltà economiche perché senza sovvenzioni da parte del governo, è costretto a cedere la «Revue Encyclopédique» a Hippolyte Carnot, figlio dell'*organizzatore della vittoria* ai tempi della Grande Rivoluzione, e a Pierre Leroux, già operaio tipografo, al tempo entrambi redattori della rivista enciclopedica «Le Globe».

---

[84] P.A. Dufau, *De l'abolition graduelle de l'esclavage (troisième article)*, R.E., 1830, XLVIII, pp. 596 ss.

10.1. *La sfiducia nella politica e la speranza nella società industriale*

Portavoce dell'opposizione liberale alla Restaurazione, all'indomani delle Tre Giornate anche il *Globe* subisce la defezione del gruppo *dottrinario,* che entrerà a far parte del governo di Luigi Filippo, ma sopravvive come organo dei sansimoniani, a partire dal 18 gennaio 1831, l'anno del massimo diffondersi del sansimonismo. In tale data Leroux, rimastone il direttore responsabile dopo aver firmato la protesta dei giornalisti contro le ordinanze di Carlo X, scrive l'articolo *Plus de libéralisme impuissant*, in cui denuncia, nella nuova soluzione governativa, il fallimento della politica liberale e, più in generale, il fallimento dell'azione politica: «Le problème de la politique est devenu celui de la science sociale tout entière»[85]. Egli adotta perciò la dottrina di Saint-Simon, secondo cui la società industriale offre garanzie di benessere per tutti, e che gli sembra poter risolvere il problema sociale posto dalla Rivoluzione, e non più differibile: «Amélioration constante, sous le rapport moral, intellectuel et physique, du sort de la classe la plus nombreuse et la plus pauvre»[86].

Si tratta dell'interpretazione della dottrina in senso democratico ed egualitario, basata sull'ultimo lavoro, incompiuto, di Saint Simon, *Le Nouveau Christianisme*, inteso dalla sua scuola come il coronamento dell'intera opera. Ma in Saint Simon è anche profondamente radicata la convinzione secondo cui l'*industria* in quanto tale garantirà il benessere di tutti i *produttori*, industriali e operai; Leroux è contagiato da questa prospettiva ottimistica, e si fa predicatore della dottrina nel sud della Francia e nel Belgio. Ad agosto entra alla «Revue Encyclopédique», a capo di una redazione composta da ex allievi dell'*École polytechnique* (a cui egli stesso ambiva prima di dover abbandonare le prove di concorso in seguito alla morte del padre, commerciante di bevande, e di essere costretto a guadagnarsi da vivere come operaio tipografo): Jean Raynaud, Abel Transon, Michel Chevalier, Emile Péreire, dei quali la maggior parte farà carriera nel mondo della finanza. Lo stesso Saint-Simon aveva compreso che la borghesia finanziaria, istituendo il sistema del credito, è la fondamentale leva del capitalismo.

Ma l'alleanza tra borghesia e proletariato, che ha reso possibile la rivoluzione del 1830, svela il suo carattere provvisorio con le prime crisi di sovrapproduzione del capitalismo, e con la meccanizzazione, da cui la riduzione dei salari e la disoccupazione: gli operai, ancora divisi nelle frazioni

---

[85] *De la tendance nouvelle des idées, articolo redazionale*, R.E., 1832, LIII, p. 3.

[86] *Doctrine de Saint-Simon*, R.E., 1830, XLVIII, p. 360.

delle antiche corporazioni, distruggono le macchine, come gli stampatori nel dicembre 1830, poi scioperano per i salari, come i setaioli a Lione nel gennaio 1831, i cui moti si estendono a Parigi. Laurent ne dà conto in calce all'articolo su *La politique intérieure de la France après la révolution de 1830*, quando rivendica le esigenze legittime del popolo di Lione, «qui a repoussé le panache de Henri et l'aigle de Napoléon, pour inscrire sur sa bannière *vivre en travaillant ou mourir en combattant*».

Sono chiariti i termini della questione sociale: parlando della trasformazione avvenuta in seno al «tiers état» – che Barnave, ai tempi della Rivoluzione del 1789, identificava con la borghesia in lotta contro l'*ancien régime*[87] – Laurent osserva in *Le tiers-état et les prolétaires*, come il terzo stato, preoccupato di non essere confuso con le masse popolari, «continua de faire de l'aristocratie dans la démocratie», distinguendo «les gens comme il faut des gens de rien» e costituendo così «la mauvaise queue de la féodalité». I proletari appartengono alla classe lavoratrice che garantisce il benessere della società, e a quella degli intellettuali, composta dai professionisti, dagli insegnanti, dagli artisti e dagli stessi uomini dell'*École polytechnique* che posseggono quel «trésor scientifique» che è patrimonio della nazione[88].

Il padronato, dopo aver spinto i suoi operai sulle barricate nel 1830, ottenuta la vittoria spazzando via quei residuati dell'*ancien régime* che erano i Borboni, si allea al governo, che interviene con le forze armate per reprimere le proteste; e la «Revue Encyclopédique» deve schierarsi.

9.2. *L'ingresso nel partito repubblicano*

Leroux lascia la scuola sansimoniana alla fine del 1831, e, nell'aprile del 1832 decreta con Michel Chevalier la chiusura del «Globe», poiché inizia a palesarsi il solco tra lui e la scuola, destinato ad accentuarsi con gli anni: «C'est l'avenir seul qui mettra les saint-simoniens en rapport avec l'aristocratie financière et Leroux en rapport avec les ouvriers»[89].

Fondamentale in questo processo è la formazione di una coscienza politica: Leroux entra nel partito repubblicano, nato dal vecchio partito liberale, la cui base sociale è costituita dalla media borghesia imprenditoriale e mercantile che, avendo ancora bisogno del proletariato, fa del suffragio universale il

---

[87] A. Barnave, *Introduction à la Révolution francaise, texte établi sur le manuscript original et présenté par F. Rude*, Librairie Armand Colin 103, boulevard Saint Michel, Paris, 5e, 1960.

[88] P.-M. Laurent, *Le Tiers Etat et les Prolétaires*, R.E., 1832, LVI, pp. 241 ss.

[89] H. Mougin, *Pierre Leroux*, Editions sociales internationales, Paris, 1938.

principale punto del suo programma; e chiama alla rivista, come collaboratori, esponenti del più indomito repubblicanesimo, quali Jean Reynaud, Paul-Matthieu Laurent, Théodore Fabas, e primo fra tutti Achille Roche. Questi fu incarcerato nell'ultimo anno del regno di Carlo X, per aver scritto dei *Mémoires* sulla Rivoluzione francese con la riabilitazione della Convenzione, sotto lo pseudonimo Levasseur de la Sarthe, che ne era stato uno dei membri.

Gli avvenimenti che seguono vedono la rivista prendere apertamente posizione per il *quarto stato:* in un articolo redazionale, è commentata l'imponente manifestazione, con tanto di berretti rossi, del 5 giugno 1832, in occasione dei funerali del generale Lamarque, membro del partito repubblicano, soffocata nel sangue da Thiers in soli due giorni; Roche denuncia la politica dispotica, e la repressione che ne è seguita, come il frutto del vergognoso pregiudizio che confonde la democrazia con il terrore, e che affibbia l'epiteto di *école de '93* alle dottrine democratiche, mentre invece queste sono patrimonio dell'intera rivoluzione dell'89: «nous sommes, quant à nous, admirateurs de la révolution tout entière»[90].

Ma nell'indicare i provvedimenti da adottare, Leroux si attiene ad una soluzione riformista, limitandosi a chiedere l'estensione del diritto di voto: «Après la révolution de juillet, il fallait un progrès dans le gouvernement représentatif... Ce progrès n'a pas été fait... Voilà la cause de la Vendée et du 5 juin»[91]. Anche nell'articolo *De la philosophie et du Christianisme*, indirizzato *Aux politiques* (con questo titolo apparso nel 1846), dove afferma che «l'abolition de la noblesse n'est qu'un prélude [...] à l'élévation du prolétariat», Leroux, pur sottolineando il debito di riconoscenza che la prima ha nei confronti del secondo, si limita a invocare la soluzione legislativa, mantenendo un po' ingenuamente la fiducia nella funzione arbitrale dello Stato[92].

Anche in politica economica, la «Revue Encyclopédique» attenua la radicalità delle istanze rivoluzionarie, richiamandosi a Saint-Simon. Membro della società popolare dei *Droits de l'homme*, che si ispira alla *Dichiarazione dei Diritti dell'Uomo* presentata alla Convenzione da Robespierre nel '93, Leroux dichiara di voler «tradurre» la *Déclaration*: mentre la Costituzione del '93 afferma che il diritto di proprietà è limitato dal diritto alla vita e che è fondato sul lavoro, Leroux fonda la teoria della proprietà sul principio sansimoniano «a chacun suivant sa capacité, à chaque capacité suivant ses oeuvres»,

---

[90] A. Roche, *Sur les prétendues doctrines de '93*, R.E., 1832, LV, p. 13.

[91] *Note sur les derniers événemens* (art. non firmato), R.E., 1832, LIV, p. 4.

[92] Si tratta di quella «mistica dello Stato-arbitro» di cui parla Mougin, cit., p. 54, nel momento in cui questo diventa invece lo strumento della classe borghese.

prescindendo dal diritto alla vita. Con ciò il diritto di proprietà è legato alle *capacités*, e viene affermata la libertà di arricchirsi: «chacun possède selon son travail»[93].

Anche un convinto repubblicano, ma votato alla causa del sansimonismo come Laurent, non mette in discussione la proprietà in quanto tale: «J'ai dit et répété publiquement que la propriété restait comme un dernier lien, pour empecher la dissolution complète de la société», semmai la sua trasmissione ereditaria, che deve essere abolita. Solo a questa condizione, secondo Garnier, «la propriété est respectable et respectée», implicitamente contro il principio espresso da Babeuf: «Respect aux propriétés respectables»[94]. Tale impostazione conduce Emile Péreire, in *De l'assiette de l'impôt*, al massimo a richiedere provvedimenti quali l'abolizione della tassa sui consumi e una tassazione diretta proporzionale e progressiva.

9.3. *Dall'associazione sansimoniana all'associazione operaia*

Leroux si descriverà nel 1849 come «l'enfant de 1793» e «fils de la Convention», non potendosi consolare di essere nato in realtà nel 1797, in piena reazione del Direttorio: grazie a questa paternità ideale, egli rimane un rivoluzionario, volendo promuovere il passaggio del potere politico dalla borghesia al proletariato; in seguito dirà: «J'écris pour les esclaves contre les maitres, pour les pauvres contre les riches»[95]. Così è uno dei primi che, a partire dal giugno 1832, intuisce le scarse possibilità legali che la monarchia di Luglio lascia all'opposizione, ma, diffidando dell'attività cospirativa, continua la sua battaglia, sia alla *Société des Droits de l'homme*, sia prospettando sulla «Revue Encyclopédique» soluzioni anticipatrici di tempi nuovi in campo economico, con l'elaborazione del principio sansimoniano di associazione[96]: a partire dal secondo trimestre del 1832 compare, sotto l'intestazione di ogni volume della rivista, la scritta *liberté, égalité, association*.

Incaricato nel 1833 di redigere, per la *Société des Droits de l'homme*, un *Exposé des principes républicains*, Leroux, quale appartenente alla tendenza egualitaria di stampo babuvista, pone in primo piano il successo della propaganda

---

[93] P. Leroux, *De la philosophie et du Christianisme*, R.E., 1832, LV, p. 315 n.

[94] G. Babeuf, *Cadastre perpétuel*, cit., p. 35, in R. Garaudy, *Les sources francaises du socialisme scientifique*, cit., p. 63.

[95] P. Leroux, *Prefazione* a *De l'Égalité*, Imprimerie de Pierre Leroux, Boussac 1848.

[96] L'idea di associazione, propria dei repubblicani all'indomani della rivoluzione di Luglio, si trasferisce dal campo politico a quello economico per opera dei sansimoniani: cfr. A. Galante Garrone, *Filippo Buonarroti e i rivoluzionari dell'800*, cit., pp. 282 ss.

presso gli operai, e chiede istituzioni democratiche come la guardia nazionale popolare, lo sviluppo dell'istruzione primaria, il suffragio universale e la sponsorizzazione, da parte dello Stato, di imprese industriali puramente operaie.

Nello stesso 1833 il fratello Jules, *ouvrier compositeur*, redige per conto del comitato tipografico la *brochure* di propaganda per l'organizzazione di una stamperia, in concorrenza con il padronato, dal titolo *De la nécessité de fonder une association ayant pour but de rendre les ouvriers propriétaires de leurs instrumens de travail*: in essa propone l'istituzione di cooperative di produzione, in cui le macchine, inventate dal popolo, ritorneranno di proprietà del popolo.

In sintonia con il fratello, Pierre Leroux presenta sulla «Revue Encyclopédique» alcuni progetti progressisti di carattere popolare, tra cui la fondazione di una società di coordinamento per la costituzione di colonie agricole, per assorbire la disoccupazione e svuotare le carceri, l'espropriazione delle proprietà private per scopi di pubblica utilità, e la riforma del sistema ipotecario, illustrata da Decourdemanche. Quest'ultima, sottraendo le terre al diritto di primogenitura e alle cosiddette *sostituzioni*, di retaggio feudale, che le rendevano inalienabili e inconvertibili nelle trasmissioni ereditarie, ha come obiettivo la mobilizzazione del suolo e la conseguente formazione della grande proprietà industriale, ed è presentata da Leroux come un provvedimento analogo all'introduzione delle macchine nel processo lavorativo: in un primo momento esso avviene a danno dei lavoratori, ma a lungo termine si rivela necessario, in quanto funzionale ai progressi di socializzazione dei mezzi di produzione «que l'avenir tient en réserve»[97].

Se non chiarisce ancora come ciò possa avvenire, Leroux pone tuttavia le basi della solidarietà operaia, di cui sono espressione le fusioni di associazioni di un unico mestiere[98]; e, accanto alle richieste di aumento dei salari e di riduzione della giornata lavorativa, lo sforzo di associazione operaia si svilupperà oltre che nelle cooperative di produzione, anche nell'organizzazione della resistenza al potere, all'origine dei sindacati.

9.4. *L'analisi della lotta di classe, e la società senza classi*

Nel numero di novembre-dicembre 1833, ma pubblicato nel 1834, Pierre Leroux, insieme al fratello Jules, affronta sulla «Revue Encyclopédique» per la prima volta la questione sociale dal punto di vista di un'analisi dei rapporti

---

[97] P. Leroux, *Du progrès législatif*, R.E., 1832, LVI, pp. 259 ss., a commento dell'art. *Projet de loi sur le régime hypothécaire* di A. Decourdemanche, presentato a seguire, pp. 273 ss.

[98] Cfr. E. Dolléans, *Storia del movimento operaio. 1830-1871*, Sansoni, Firenze 1968, pp. 44 ss., per il quale il 1833 è l'anno in cui «la Francia operaia e repubblicana ha conosciuto uno di quegli istanti di fraternità così rari nella storia del XIX secolo».

di classe e del loro antagonismo, fondato sulla proprietà dei mezzi di produzione: «la lutte actuelle des prolétaires contre la bourgeoisie est la lutte de ceux qui ne possèdent pas les instruments de travail contre ceux qui les possèdent»[99]. Jules Leroux spiega che la questione del salario, responsabile dello sfruttamento dell'uomo da parte dell'uomo, nasce da un processo storico e da un principio economico: la Convenzione, dopo aver nazionalizzato i beni del clero e della nobiltà, li aveva infeudati al primo venuto, consegnando all'egoismo individuale la fortuna pubblica; poi, durante la Restaurazione, i discepoli di Smith posero la questione del salario, limitandosi alla descrizione analitica delle cause che lo regolano, cause che tendono a farlo diminuire, e quindi a far aumentare la miseria del popolo. Ma poiché il salario non è «une nécessité constitutive de la civilisation», e poiché l'organizzazione della società in classi è un ostacolo alla libera produzione, Jules Leroux auspica l'avvento di una società «à une seule classe»[100], cioè senza classi.

Jules Leroux conclude il suo articolo affermando che lo scopo finale di una società senza classi è la modificazione della struttura della proprietà; ma il peggioramento della condizione operaia fornirà di lì a poco l'occasione per teorizzare l'eliminazione della proprietà privata e la sua collettivizzazione, quale condizione di una società senza classi. In seguito infatti ai moti insurrezionali di aprile del 1834, e alla spietata repressione che ne segue, molti esponenti del movimento operaio vengono a contatto in carcere con le dottrine di Babeuf, divulgate già nel 1828 da Filippo Buonarroti in *De la conspiration pour l'égalité*, e iniziano a professare teorie comuniste.

9.5. *Il «sistema dell'associazione» contro il potere: i moti del 1834*

Pierre Leroux è convinto che né il liberalismo, né il socialismo sono in grado di risolvere il problema sociale: egli è il primo ad usare la parola *socialismo*, già dal 1826, ma non è l'inventore del termine moderno, come lui stesso si riteneva, anche se «diede un contributo decisivo all'ingresso di quella parola nel vocabolario politico francese. E siccome il francese, allora, era la lingua universale dell'Europa colta, ciò volle dire un ingresso nella circolazione intellettuale di ogni paese»[101]. Infatti egli usa la parola *socialismo*, fino al 1848, solo in un senso negativo, quale degenerazione del sansimonismo, in opposizione al *sistema dell'associazione*. Nel già citato *Cours d'économie*

---

[99] P. Leroux, *Cours d'économie politique*, R.E., 1834, LX, p. 102.

[100] J. Leroux, *Du salaire*, R.E., 1834, LX, pp. 118 ss.

[101] Cfr. G. Spini, *Le origini del socialismo*, Einaudi, Torino 1992, p. 353.

politique il *socialismo* è contrapposto all'*individualismo*, come le due tendenze dell'epoca, che riassumono in sé la lotta tra il liberalismo degli economisti politici e la teocrazia dei sansimoniani: nel primo vige il principio egoistico *chacun chez soi, chacun pour soi*, per cui l'individuo è privo di ogni tutela governativa e sociale; nel secondo l'individuo è subordinato al governo che, simile a *une hydre géante*, avvolge nelle sue pieghe l'intera società. Perciò è solo in nome dell'associazione che si combatte il potere.

La scintilla che fa scoppiare la polveriera dell'esasperazione popolare, già innescata dalla proposta di una legge contro le associazioni, è dovuta alla repressione di uno sciopero a Lione per l'istituzione della tariffa minima salariale: la sommossa si estende in molte altre città della Francia, fino a Parigi. La reazione di Thiers, ministro degli Interni, è particolarmente efferata, culminando nel massacro di rue Transnonain, in cui vengono uccisi gli abitanti di un intero caseggiato, poi rivelatisi innocenti; le carceri sono riempite di manifestanti. L'anno seguente si apre il processo contro 121 accusati, che vogliono trasformare il giudizio in un grande dibattito politico, nominando come propri difensori gli uomini ritenuti in grado di rappresentare degnamente le loro rivendicazioni, tra i quali anche i direttori della «Revue Encyclopédique».

Questa, nel *Préambule. La loi sur les associations jugée par ses auteurs* all'articolo di T. Fabas sul *Droit d'association*, si era già espressa contro il progetto di legge sulle associazioni, ricordando che i suoi stessi autori, i *dottrinari* al governo, avevano condannato nel 1828 la vecchia legge 291, che vietava le associazioni, in una precedente esposizione dei loro principi apparsa sul «Globe»: in tre articoli avevano dichiarato moralmente impossibile attaccare il diritto di associazione come principio, con le seguenti parole: «c'est plus qu'un droit, c'est une faculté […] au moins aussi sacré que le droit d'écrire». Perciò la «Revue Encyclopédique» può accusare questi «grands hommes d'Etat» di averlo fatto nel 1834 nel modo più completo: «Votre loi est, de votre aveu, ATROCE et MONSTRUEUSE […]. C'est une loi de TERREUR, une loi d'INQUISITION», che dimostra come questa maggioranza di governo «c'est la FORCE, et pas autre chose»[102].

Oltre a questo intervento, i due direttori della rivista, firmando una lettera di adesione alle rivendicazioni degli accusati nel processo di aprile, rischiano di trasformarsi in imputati. Il processo si conclude nel gennaio 1836 con pesanti condanne, che finiscono col disorientare il partito repubblicano, anche se esso acquista consensi nell'opinione pubblica; gli operai sono costretti a rifugiarsi nelle società segrete.

---

[102] In R.E., 1833, LX, pp. 151 ss.

Ma già la legge di settembre 1835 compie l'opera del governo, che, prendendo a pretesto l'attentato di Fieschi a Luigi Filippo, ristabilisce la censura e prescrive detenzioni e ammende per ogni offesa alla persona del re e per ogni attacco al governo stesso. Molti giornali cessano le pubblicazioni; la stessa «Revue Encyclopédique» chiude col numero di gennaio-marzo del 1835, dopo un silenzio di circa sei mesi: a metà del 1834 era comparso il vol. LX, che avrebbe dovuto essere pubblicato a fine 1833, come compendio dei mesi da ottobre a dicembre. Di questo ritardo Leroux si scusa, e denuncia la censura della stampa francese, in particolare delle raccolte periodiche, da parte sia del «grand empereur» russo, sia dei «petits tyrans de l'Italie», tra cui spicca «le roi de Piémont».

Negli ultimi due volumi della «Revue Encyclopédique» il direttore conclude con un'aperta professione di fede repubblicana[103], nella quale da un lato rivendica alla rivista il merito di fornire una teoria filosofica del progresso dell'umanità, riabilitando il popolo, dall'altro lato attribuisce alla Francia una priorità sulle altre nazioni, quale portatrice del «sentiment générateur de notre époque». Infatti Leroux individua la grande legge del progresso nella continuità con la tradizione, tutta francese, del XVIII secolo e la Rivoluzione dell'89; e riconduce il principio filosofico di certezza, ricavato dal consenso universale, al «principe de la souveraineté du peuple», e quindi alla politica.

Un articolo di Fabas, dal significativo titolo *De la tendance de notre époque vers la république*, ripercorre la storia di Francia a partire dal 1789, e mostra come l'ideale della repubblica basato sul principio di fraternità, proclamato dal Cristianesimo, sia lo scopo della «civilisation dite moderne ou philosophique ou francaise».

Infine sarà la capitale della Francia, Parigi, la città del futuro, e non solo per motivi economici: «Les fondemens de la cité parisienne ne sont pas seulement dans le droit matériel de la ville, mais dans le droit social de la France», poiché Parigi è «le libre foyer du génie de la France», la guida centrale dell'epoca moderna, l'«anneau spirituel» dell'alleanza della nazione francese con le altre nazioni[104]. Con ciò vengono poste le basi del nazionalismo ottocentesco, che sarà la fucina dei conflitti mondiali del secolo successivo; e il filobonapartismo della rivista, che culmina in Laurent con l'acquisizione di Napoleone alle teorie di Saint-Simon («il fit de son armée une société selon la capacité, et non pas selon la naissance; une société où le mérite seul donnait droit à la fonction

[103] P. Leroux, *Préface. De la doctrine du progrès continu*, R.E., 1834, LX, p. IV.

[104] J. Reynaud, *De la situation physique de Paris, considérée dans ses rapports avec la politique*, R.E., 1835, LXI, p. 74.

et à la récompense»), e la diffusa fascinazione nei confronti dell'*homme extraordinaire,* sono elementi che, a breve, renderanno possibile il colpo di stato del 2 dicembre 1851 a favore di Napoleone III.

9.6. *Il socialismo umanitario*

Il sistema dell'associazione di Leroux è visto come il termine e, allo stesso tempo, il principio unitario della storia, già teorizzato da Leibniz nel motto *Le présent, engendré du passé, est gros de l'avenir*[105]. Esso contiene in sé i germi di una nuova religione, non più confessionale, né ricondotta ad un Cristianesimo rinnovato, ma imperniata sul principio di Umanità, comune a tutte le religioni, a partire da quelle orientali.

Per tale *humanitarisme,* che «nul n'a mieux incarné en lui»[106], Pierre Leroux ha esercitato una profonda influenza sul socialismo romantico[107] di Sainte-Beuve, George Sand, Victor Hugo, Renan, ma anche su riformatori come Louis Blanc.

L'aspetto «sentimentale» del pensiero di Leroux è ritenuto la causa della *damnatio memoriae* di cui è stato vittima, e che Henri Mougin spiega con la mancata comprensione del corso della storia: infatti, se intorno agli anni '30 Leroux aveva intravisto l'emergere, nel processo storico, della lotta di classe tra borghesia e proletariato, non ha poi inciso efficacemente sulla progressiva affermazione del secondo a partire dal decennio successivo, continuando a porsi da un punto di vista *metafisico*, quello appunto della religione dell'Umanità, che si richiama ad un comune fondamento della religione e della filosofia. In questo senso, colui che poteva a buon diritto essere visto come l'*enfant du miracle* della Rivoluzione francese è stato superato dagli avvenimenti: l'unica ideologia progressiva, cioè utile all'affermazione del movimento operaio, si dimostrò essere non già l'idealismo, ma il materialismo.

Tuttavia l'idealismo di Leroux prevede un impegno sociale che si oppone all'immobilismo politico, proprio o di chi tenti di ricostruire una società teocratico-feudale di retaggio medioevale, a torto rivalutata dalla scuola sansimoniana come epoca organica – e a cui si rifacevano Napoleone e la

---

[105] P. Leroux, *De la loi de continuité qui unit le dix-huitième siècle au dix-septième*, R.E., 1833, LVII, p. 476.

[106] Cfr. J. Pioger, *Pierre Leroux socialiste*, in «Revue socialiste», 1896, XXIII, p. 461.

[107] Cfr. D. Owen-Evans, *Pierre Leroux et le socialisme romantique, Rivière 1848*, *Introduction*, pp. 33 ss., dove la biografia di Leroux è costruita a partire dalle sue relazioni con i contemporanei.

Restaurazione[108] – oppure di chi, in nome di uno spiritualismo puro, si richiami alla filosofia eclettica. Questa è l'espressione dell'individualismo inglese che, con Cousin e Jouffroy, è la filosofia ufficiale del governo di Luigi Filippo, alleata ai *dottrinari*.

L'origine dell'eclettismo in realtà risale all'Impero: esso, basandosi sul metodo dell'analisi, spiega l'uomo dal punto di vista delle sue idee, astraendo dalla vita dell'Umanità, secondo uno spiritualismo frammentario che conduce alla giustificazione dell'esistente; è così che «doctrinarisme et éclectisme sont devenus synonymes». Dal punto di vista storico, l'eclettismo nasce dalla rottura con la tradizione della filosofia del XVIII secolo e della Rivoluzione francese, ad opera prima dell'Impero e poi della Restaurazione, per mettere capo ad «un misérable syncrétisme politique», che ha prodotto il «juste-milieu». Essendo infatti «sans tradition et sans but», la scuola eclettica «ne pouvait aboutir qu'à cette espèce de système qu'on a nommé doctrinarisme, et dont le but est la légitimation et la jouissance du présent»[109].

In tal modo sono stati traditi gli ideali di libertà e di virtù: Victor Cousin, in particolare, dal Carbonarismo è passato alla Restaurazione, poi ha aderito al governo di Luigi Filippo, vantando un ruolo rilevante nel cambiamento di regime, quando, in realtà, augurava lunga vita alla Restaurazione opponendosi, nel luglio 1830, alla pubblicazione del *Globe* dopo le ordinanze reali[110].

Invece nel decennio 1830-40, in cui si pongono le basi del socialismo pre-marxiano, Pierre Leroux attira l'interesse degli operai e contribuisce alla formazione della loro coscienza di classe, con diverse opere: oltre alla fondazione della *Revue indépendante* (1836-1844), poi della *Revue sociale* (1845-1848), scrive il trattato *De l'Égalité* (1848), in cui si richiama esplicitamente al Rousseau del *Discours sur l'Inégalité*, per ribadire che la realizzazione dell'eguaglianza, finora riconosciuta solo come diritto, è lo scopo ultimo del progresso dell'umanità, che metterà capo al socialismo – e Pierre Leroux è visto dai suoi contemporanei come «il Rousseau del XIX secolo». Per Mougin si tratta di una democrazia religiosa, in cui il diritto all'eguaglianza rimane un «revendication de la conscience» e non un principio di governo; ma in due significative opere, *De la Ploutocratie* (1840) e *Malthus*

---

[108] Il primo prese a modello la società teocratico-feudale del Medioevo e di Carlomagno e, compiendo la sua opera di conquistatore e di civilizzatore, presidiò la Francia militarmente, ponendola in stato d'assedio; la restaurazione tentò, «par un adroit compromis avec nos idées de 1789», di rimettere la Francia nello stampo rotto della vecchia monarchia: *Religion. Aux philosophes*, R.E., 1831, LI, p. 500.

[109] P. Leroux, *De la philosophie éclectique enseignée par M. Jouffroy*, R.E., 1833, LVIII, pp. 341 ss.

[110] P. Leroux, *Réfutation de l'éclectisme*, Genève, Slatkine Reprints, 1979, pp. 69 ss.

et les économistes (1846), Leroux incide nella critica della società del tempo, smascherando la leggenda ufficiale che vuole la Francia una nazione di proprietari, mentre meno di un milione di individui ne sfruttano ben 34, e mostra come la dottrina di Malthus si presta a giustificare l'anarchia e lo sfruttamento capitalista, presentando come una pretesa legge eterna ciò che non sono che le conseguenze delle contraddizioni economiche del capitalismo.

Nel 1848 Leroux si trova nella cittadina di Boussac, dove, in una stamperia da lui fondata con l'aiuto della scrittrice George Sand, è impegnato a pubblicare, oltre ad un giornale locale, tutti i suoi articoli sparsi nelle riviste degli anni precedenti, per cui non prende parte attiva alla rivoluzione; tuttavia si presenta alle elezioni, ed entra a giugno alla Camera dei deputati nel gruppo dei socialisti, dopo aver accettato questo appellativo nel senso moderno del termine. In quella sede affronta i problemi politici dal punto di vista di un idealismo ingenuo; però riemerge in lui l'uomo del popolo nella partecipazione ai clubs, ai meetings e ai banchetti, ed è quasi il solo, «au nom du socialisme», a prendere la parola nell'Assemblea per difendere gli insorti di giugno.

Dopo il colpo di stato di Napoleone III, va in esilio in Inghilterra, prima a Londra, poi a Jersey, dove vive pressoché in miseria, dedicandosi a studi biblici, e perdendo il contatto con il movimento operaio. Ma il suo socialismo religioso, per il quale «Jésus c'est le frère de tous les prolétaires»[111], ispirerà la corrente dei babouvisti mistici con Lahautière, che gli dedicherà, negli anni Quaranta, il periodico «La Fraternité».

Così il filo rosso che unisce, nella «Revue Encyclopédique», Robespierre a Babeuf, corre parallelo a quello che unisce Robespierre a Napoleone.

Pierre Leroux muore nell'aprile 1871, e la Comune di Parigi partecipa con due suoi rappresentanti ai funerali, volendo rendere omaggio non al «philosophe, partisan de l'école mystique dont nous portons la peine aujourd'hui, mais à l'homme politique qui, au landemain des journées de juin 1848, a pris courageusement la défense des vaincus».

11. La «Revue Encyclopédique» e l'Accademia delle Scienze di Torino

11.1. *L'apprezzamento per l'Accademia*

Già nel 1786 – tre anni dopo la fondazione dell'«Académie Royale des Sciences de Turin» in pieno clima illuministico – in una recensione francese delle

[111] P. Leroux, *Préface. De la doctrine* [...], cit., p. XXIX.

sue prime memorie, il carattere scientifico è connesso allo spirito filosofico, «cet esprit Philosophique qui ne marche qu'avec le flambeau de l'expérience»[112].

La «Revue Encyclopédique», dal 1823 al 1831, nelle «Sciences physiques» della sezione «Analyses et extraits d'ouvrages choisis», riprende le memorie dell'Accademia, «l'une des premières Académies de l'Europe»[113], secondo Ferry[114], che spiega già dalla prima recensione il motto che ne motiva l'istituzione – *Vérité et Utilité*: «on choisit pour devise la Vérité qui tend la main à l'Utilité».

Viene affermata innanzitutto, rispetto alle altre nazioni europee, la priorità dell'Italia per le sue ricerche scientifiche, «plus que toute autre, la terre classique des naturalistes et des physiciens», e l'importanza dell'Accademia delle Scienze di Torino anche per le ricerche matematiche di Plana e di Bidone, «considérant toujours les sciences par rapport aux applications qu'on peut en faire».

Allo stesso modo, per la classe delle scienze morali, si apprezzano quelle ricerche storiche e filologiche che sono utili per la vita sociale: «C'est avec la raison seule qu'il faut écrire, meme sur la morale et sur la politique, si l'on veut apprendre aux hommes des vérités utiles». Vengono citate le dissertazioni di Amedeo Peyron, celebre filologo, specialista in lingue orientali, sulle medaglie fenicie e sul Museo Egizio, e di Galeani Napione, già nominato direttore della classe delle scienze morali dell'Accademia, per aver gettato una nuova luce sul Medioevo circa l'applicazione delle scienze all'arte della guerra.

Tuttavia Ferry lamenta che le ricerche della seconda classe, quella delle scienze morali, non possa sostenere il paragone con i successi ottenuti dalle scienze matematiche e fisiche, a causa della ristrettezza delle sue attribuzioni: non occupandosi della natura dell'uomo in generale, «on ne batit que pour l'époque et pour les hommes d'aujourd'hui», rinunciando a porre solide basi per un edificio che i secoli consolideranno. Infatti, pur ammettendo l'esistenza di un'«apathie naturelle» dei popoli, intesa come «une certaine modération de désir et d'affections», più preoccupata dei rischi da correre che dei vantaggi da sperare, Ferry è sicuro che «le genre humain s'achemine vers le but indiqué par la raison, et que, de jour en jour, sa marche devient plus ferme et plus sure»[115].

---

[112] Cfr. Vidal, *Mémoire historique*, in «Mémoires de l'Académie royale des Sciences», 1784-85, 1786, pp. III-IV.

[113] C.-J. Ferry, *Sciences physiques in «Mémoires de l'Académie des Sciences de Turin», tomes XXVIII et XXIX*, in R.E., 1826, XXX, p. 33.

[114] Claude-Joseph Ferry, ex rivoluzionario, tra coloro che votarono per la morte di Luigi XVI, ebbe incarichi di docenza sia all'*École du génie*, sia all'*École polytechnique*, dove rivelò la sua vocazione per la scienza e le sue applicazioni.

[115] C.-J. Ferry, *Sciences physiques in «Mémoires de l'Académie des Sciences de Turin», Tome XXV*, R.E., 1823, XVII, pp. 37 ss.

La fede nel progresso è ostacolata dal clima e dalla politica della Restaurazione: la «Revue Encyclopédique» è vittima dell'inquisizione libraria, oltre che in Francia, anche nei paesi dominati dalle forze della reazione, tra cui il Piemonte, che arriverà a proibire la circolazione del periodico nel 1828; lo stesso Pierre Leroux si lamenta, nel 1833, del «gendarme des Alpes, le roi de Piémont, qui se permet d'avoir ses oukases et son index».

È così che, accentuatosi in seguito ai moti del 1821, questo clima culturale dominato dal clero e dalla nobiltà, e dai gesuiti nell'insegnamento, respinge le «numerose contaminazioni politiche e culturali di matrice illuminista e materialista presenti nel codice genetico della scienza torinese». La dinastia sabauda, che aveva già operato una sterzata in senso conservatore in seguito alla Rivoluzione dell'89, manteneva «una continua preoccupazione nei confronti della Francia […] che continuava ad apparire come un focolaio di diffusione di idee rivoluzionarie» attraverso le società segrete[116].

Le scienze morali si indirizzano allora verso gli studi storici, che vengono istituzionalizzati con la creazione della «Deputazione di storia patria» nel 1833. L'intento era quello di valorizzare il patrimonio culturale sabaudo, spingendo la ricerca fino al Medioevo, per scrivere una storia piemontese intesa come storia civile.

Bisognerà attendere fino a dopo il 1848 per un rinnovamento della cultura torinese, prima nella società, soprattutto con i periodici, poi nelle istituzioni preposte: è stata usata la metafora del fiume carsico, per indicare quei gruppi borghesi e nobiliari più all'avanguardia che, quasi interratisi negli anni Venti, riaffioreranno tra la metà degli anni Trenta e la metà degli anni Quaranta per poi irrompere, dopo lo Statuto e il Parlamento subalpino, in un fiume ricco di acqua e in un alveo sempre più largo[117].

11.2. *Il lascito di un militare*

La collezione completa della «Revue Encyclopédique» è stata donata, alla sua morte, dagli eredi del Cavalier Ottavio Fornaca all'Accademia delle Scienze di Torino (1905-06). Dagli atti della biblioteca risulta come il Cav. Fornaca, nato nel 1819 a Chambéry «in una famiglia tutta di soldati», si sia avviato alla carriera militare all'età di 17 anni, abbia partecipato alle

[116] Cfr. *Introduzione* a *Storia di Torino.* Vol. VI: *La città nel Risorgimento (1798-1864)*, Einaudi, Torino 2000, p. LXXIV.

[117] Ivi, p. CXLI.

prime due Guerre d'Indipendenza fino ad ottenere il grado di Colonnello dei Bersaglieri, e sia stato messo a riposo nel 1867. Poi, da quel momento, si è dedicato con passione «alle modernità della critica scientifica, religiosa, sociale» nel collezionare libri di impostazione positivistica, «informando le sue scelte al concetto delle indagini naturali e delle opinioni essenzialmente positive». L'Accademia delle Scienze esprime l'intenzione di conservare sempre viva, insieme alla «pregevole biblioteca», «anche la memoria dell'esimio e studioso donatore», che si trova in grande sintonia con l'istituzione: nella sua cultura emergono le radici illuministiche, e il connesso enciclopedismo, legate alla filosofia positivistica presente anche in Piemonte nella seconda metà dell'Ottocento.

Quanto al legame tra la carriera militare e le letture scientifiche del Cavalier Fornaca, è da presumere che egli sia l'erede di quella riforma dell'esercito che, avviata a fine Settecento da Vittorio Amedeo III, vede il passaggio del potere dalla vecchia aristocrazia di corte, presente nella cavalleria, a quella progressista e meritocratica degli artiglieri, che trova nell'Accademia delle Scienze il suo «strumento fondamentale»[118].

[118] Cfr. V. Ferrone, *Tecnocrati militari e scienziati nel Piemonte dell'Antico Regime alle origini della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, in «Rivista storica italiana», XCVI, 1984, II, p. 424.

INDICI

INDICE DELLE MATERIE

Geoscienze

Mappatura di un territorio per il rischio di liquefazione sismo-indotta dei terreni a diverse scale geografiche, di Carlo Giovanni Lai 53

Scienza dell'ingegneria

The Scattering by an Half-Plane Embedded in Stratified Media. Network Methods: Electromagnetics vs *Elasticity*, di Vito Daniele e Rodolfo Zich 5

Multilayered Beam, Plate and Shell Theories with Interlaminar Variables and Lagrange Polynomials, di Erasmo Carrera, Riccardo Augello e Daniele Scano 99

Storia medievale e moderna

La «Revue Encyclopédique» (1819-1835): biografia di una rivista fra tre rivoluzioni, di Alessandra Foresto Lo Piano 137

I contributi pubblicati nelle «Memorie» e negli «Atti» dell'Accademia delle Scienze di Torino sono classificati in base al seguente elenco di materie:

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Biologia animale e dell'uomo
Biologia vegetale
Chimica
Fisica
Geoscienze
Matematica
Scienza dell'informazione
Scienza dell'ingegneria
Scienze dell'ambiente
Scienze e ingegneria dei materiali
Storia delle scienze.

Classe di Scienze morali, storiche e filologiche

Archeologia, Epigrafia, Numismatica
Bibliografia
Biografie e Commemorazioni
Diritto e Storia del Diritto
Economia Politica
Filologia e Linguistica
Filologia Orientale
Filologia, Glottologia, Storia Letteraria del Medio Evo e dell'Età Moderna
Filologia, Glottologia, Storia Letteraria dell'Antichità Classica
Filosofia e Storia della Filosofia
Geografia
Paleografia e Diplomatica
Pedagogia
Storia Antica
Storia dell'Arte
Storia Contemporanea
Storia Medievale e Moderna

INDICE

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

The Scattering by an Half-Plane Embedded in Stratified Media. Network Methods: Electromagnetics vs *Elasticity*, di Vito Daniele e Rodolfo Zich 5

Mappatura di un territorio per il rischio di liquefazione sismo-indotta dei terreni a diverse scale geografiche, di Carlo Giovanni Lai 53

Multilayered Beam, Plate and Shell Theories with Interlaminar Variables and Lagrange Polynomials, di Erasmo Carrera, Riccardo Augello e Daniele Scano. 99

Classe di Scienze morali, storiche e filologiche

La «Revue Encyclopédique» (1819-1835): biografia di una rivista fra tre rivoluzioni, di Alessandra Foresto Lo Piano 137

Indice delle materie 195

Anno di fondazione della rivista: 1759
Direttore responsabile: Massimo Mori
Autorizzazione del Tribunale di Torino, Registro Stampa n. 73/2018 (già 2685/1977)
Variazione di titolo disposta dal Tribunale di Torino in data 3/4/2023
Iscrizione al R.O.C. n. 2037 del 30/6/2001
Tiratura: 250
Stampa interni su carta patinata opaca

Finito di stampare nel maggio 2023
dalla Cooperativa sociale Impressioni Grafiche s.c.s. onlus – Acqui Terme